Über äußere Wärmeleitung
und
Erwärmung elektrischer Maschinen.

Von der Kgl. Technischen Hochschule zu München
zur
Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
(Doktor-Ingenieurs)
genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Ludwig Binder,
Diplom-Ingenieur aus Ingolstadt.

Referent: Professor Johann Ossanna.
Korreferent: Professor Dr. Oscar Knoblauch.

Halle a. S. 1911.
Verlag von Wilhelm Knapp.

Über äußere Wärmeleitung
und
Erwärmung elektrischer Maschinen.

Von der Kgl. Technischen Hochschule zu München
zur
Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
(Doktor-Ingenieurs)
genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von
Ludwig Binder,
Diplom-Ingenieur aus Ingolstadt.

Referent: Professor Johann Ossanna.
Korreferent: Professor Dr. Oscar Knoblauch.

Halle a. S. 1911.
Verlag von Wilhelm Knapp.

Vorwort.

Die Frage, wie geht Wärme von der Oberfläche eines Körpers an Luft über, ist bereits Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen.

Schon Newton (1680) beschäftigte sich mit dem Problem, nach welchem Gesetz kühlt sich ein Körper in der freien Atmosphäre ab. Durch die umfassenden Versuche von Dulong und Petit (1817) wurde sodann die fundamentale Trennung der Vorgänge in Strahlung und in Leitung und Konvektion herbeigeführt. Die Weiterentwicklung der beiden Richtungen ist aber eine ganz verschiedene gewesen. Durch eine Reihe bedeutender Männer, wie Kirchhoff, Boltzmann, Maxwell, Wien, in neuester Zeit Lummer, Planck, wurde die Wärmestrahlung zu einem besonderen Zweig der Physik ausgebildet. Demgegenüber ist das Studium der Konvektion der Physik ziemlich fremd geblieben, so daß man selbst in guten Physikbüchern diesem Thema nur eine kleine Ecke gewidmet findet. Es ist allerdings zu bemerken, daß sich dieser Mangel erst mit fortschreitender Entwicklung der Technik fühlbar machte und die neue Form des Problems auftrat, wie geht die Wärme von einem festen Körper auf bewegte Luft über. Entsprechend der Bedeutung dieser Frage für die Dampfkesselfeuerung, für die Heiz- und Kühltechnik, für die Kühlung elektrischer Maschinen nahm man auch bald von technischer Seite die experimentelle Forschung auf, und beginnend mit den mustergültigen Versuchen von Joule (1861) wurde oft mit bedeutendem finanziellen Aufwand eine Reihe von Arbeiten ausgeführt. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist aber wenig befriedigend; denn gerade in der wichtigsten Frage, wie steigt die abgegebene Wärmemenge mit der Luftgeschwindigkeit, konnte keine eindeutige Lösung gefunden werden, da nach einer Reihe von Versuchen dies linear mit der Luftgeschwindigkeit, nach anderen Versuchen mit der Wurzel aus der Luftgeschwindigkeit geschehen sollte. Auch die in neuester Zeit ausgeführten Versuche konnten hierüber keine Klärung bringen.

Der Verfasser hat sich daher die Aufgabe gestellt, das vorhandene Versuchsmaterial kritisch zu vergleichen, und ist zu dem überraschenden Ergebnis gekommen, daß diese Widersprüche verschwinden, wenn die Berechnung in geeigneter Weise, wie in der Arbeit näher beschrieben, vorgenommen wird.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt das spezielle Problem der Elektrotechnik, die Kühlung der elektrischen Maschinen. Diese für die Dimensionierung der Maschinen wichtige Frage hat wegen der mangelnden physikalischen Klärung viele Schwierigkeiten gemacht. Der Verfasser hat nun versucht, auf den im ersten Teil entwickelten Grundlagen die Erwärmung der Maschinen systematisch zu berechnen. Der reine Praktiker wird diesem Beginnen etwas skeptisch gegenüberstehen. Denn die elektrische Maschine stellt vom Standpunkt der Erwärmung aus ein sehr kompliziertes Gebilde dar und eine Reihe von Umständen sind dabei von Einfluß. Wenn es auch nicht möglich ist, alle dieselben formelmäßig zu fassen, so ist es doch als großer Fortschritt zu betrachten, wenn wenigstens in großen Zügen die Vorgänge richtig berechnet werden können. Daneben wird die an vielen Beispielen gewonnene Spezialerfahrung des Praktikers immer eine notwendige Ergänzung bleiben.

Die Arbeit ist in erster Linie für den schaffenden Ingenieur bestimmt. Neben einer möglichst elementaren Darstellung mußte daher angestrebt werden, in allen Fragen soweit zu einem abschließenden Ergebnis zu kommen, als dies bei dem vorhandenen Versuchsmaterial möglich und für die unmittelbare Anwendung notwendig erschien.

Charlottenburg, Januar 1910.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Teil

Äußere Wärmeleitung.

Abschnitt I. Strahlung.

1. Das Wesen der Strahlung 1
2. Die Strahlungsgesetze 3
3. Die Strahlungskonstanten 6

Abschnitt II. Leitung und Konvektion.

1. Wärmeübergang auf ruhende Luft 16
2 Wärmeübergang auf bewegte Luft 27
3. Natürliche Konvektion 42

II. Teil.

Erwärmung der elektrischen Maschinen.

Abschnitt I. Lüftung.

1. Beschreibung der Luftbewegungen an elektrischen Maschinen . . . 55
2. Rechnerische Verfolgung der Vorgänge 62
3. Luftreibungsverluste und Eigenerwärmung der Luft 76

Abschnitt II. Kühlung.

1. Gegenseitige Erwärmung der einzelnen Teile 81
2. Grundsätze für den Wärmeübergang auf ruhende oder bewegte Luft 88
3. Berechnung der Temperaturzunahme 102

Zusammenfassung 110

Literaturverzeichnis 111

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555418_0027

I. Teil.

Äussere Wärmeleitung.

Wenn ein Körper höhere Temperatur als seine Umgebung hat und infolgedessen Wärme abgibt, so kann man den Weg des Wärmestromes in zwei Teile zerlegen:

Erstens die Bewegung im Innern des Körpers, also von der Wärmequelle bis zur Oberfläche; man bezeichnet dies als innere Wärmeleitung. Zweitens die Bewegung der Wärme außerhalb des Körpers, also von der Oberfläche in die Umgebung; alle hierauf bezüglichen Vorgänge sollen unter äußerer Wärmeleitung zusammengefaßt werden. Diese Unterteilung entspricht einem alten Gebrauch der Physik.

Im folgenden soll ausschließlich die äußere Wärmeleitung betrachtet werden. Sie geschieht durch zwei grundsätzlich verschiedene Vorgänge. Ein Teil der von der Körperoberfläche abgegebenen Wärme bewegt sich durch Strahlung fort ebenso wie Licht; es geschieht dies also im wesentlichen ohne Benützung des den Körper umgebenden Mediums, als welches fast immer die atmosphärische Luft in Frage kommt. Der andere Teil geht gerade durch Vermittlung des angrenzenden Mediums in die Atmosphäre über und zwar durch Leitung und Konvektion.

Die Vorgänge bei der Strahlung und die Vorgänge bei der Leitung und Konvektion sind unabhängig voneinander und können daher im folgenden getrennt für sich betrachtet werden.

Abschnitt I.

Wärmeübergang durch Strahlung.

1. Das Wesen der Strahlung.

Erfahrungsgemäß beeinflussen sich zwei voneinander getrennte Körper mit verschiedener Temperatur derartig, daß die Temperatur des kälteren Körpers steigt. Dabei ist in einiger Entfernung von

den Körpern eine Temperaturänderung des Zwischenmediums kaum mehr nachweisbar. Wiederholt man den Versuch im Vakuum, so findet die Erwärmung des kälteren Körpers fast genau in derselben Weise statt; es muß also eine Übertragung von Wärme ohne Beteiligung des Zwischenmediums möglich sein. Durch einen wärmedichten Schirm kann man die Erwärmung des kälteren Körpers verhindern; ist z. B. die Wärmequelle punktförmig, so bleibt der hinter dem Schirm liegende Teil des Kegels, gebildet aus der Wärmequelle als Spitze und dem Schirm als Basis, der Einwirkung der Wärmequelle entzogen. Die Ausbreitung der Wärme erfolgt also in diesem Falle geradlinig und man bezeichnet sie daher als Strahlung.

Der Akt der Entstehung eines Wärmestrahles wird Emission genannt. Dabei gilt der Erfahrungssatz, daß die Emission nur von den Vorgängen innerhalb des emittierenden Körpers abhängt (Theorie von Prevost 1809[1]). Es emittiert z. B. ein Körper A von 100^0 C gegen einen ihm gegenüber befindlichen Körper B von 0^0 C genau dieselbe Wärmestrahlung wie gegen einen gleich großen und gleich gelegenen Körper B' von 1000^0 C, und wenn der Körper A von dem Körper B abgekühlt, von dem Körper B' aber erwärmt wird, ist dies darin begründet, daß B schwächer, B' aber stärker emittiert als A. Da Strahlung auch bei Temperaturen unter Eis-Null stattfindet, führt der Satz von Prevost zu der Anschauung, daß jeder Körper über Absolut-Null Energie emittiert und daß sich die Wirkungen der emittierenden Körper übereinanderlagern.

Die von einem Oberflächenelement emittierten Strahlen durchsetzen zuerst das angrenzende Medium, wobei sie je nach der Art desselben mehr oder weniger verschluckt werden und treffen schließlich wieder auf einen anderen Körper. Je nach dem Zustand der Oberfläche desselben sind dann zwei Grenzfälle zu unterscheiden: erstens, sämtliche auffallenden Strahlen treten in den Körper ein, werden absorbiert; ein solcher Körper heißt absolut schwarz; zweitens, die auffallenden Strahlen werden sämtlich zurückgeworfen oder reflektiert; die Oberfläche ist dann spiegelnd bei glatter Beschaffenheit oder heißt weiß bei rauhem Zustande. Die Bezeichnungen entsprechen den analogen Vorgängen der Optik; nach dem neuesten Stande der Forschung sind auch Wärmestrahlung und Lichtstrahlung wesensgleich und nur verschiedene Erscheinungsformen desselben Vorgangs (Energiestrahlung). In der Natur gibt es weder einen vollständig schwarzen noch

einen vollständig spiegelnden Körper; doch nähert sich das Verhalten der meisten Körper entweder der einen oder der anderen Grenze.

Nach dem Satze von Kirchhoff[2] (1860) hat das Verhältnis von Absorptionsvermögen zu Emissionsvermögen bei der gleichen Temperatur für alle Körper denselben Wert. Es besitzt daher der Körper mit dem größten Absorptionsvermögen, der absolut schwarze Körper, auch das größte Emissionsvermögen.

Wenn zwei nebeneinander liegende Flächenelemente gleichzeitig emittieren, so wird die Emission der einzelnen Elemente gegenseitig nicht gestört. Die von einer Fläche von endlicher Größe abgegebene Energie ist daher proportional der Größe der Fläche. Man kann also die Intensität der Strahlung aus der pro Flächeneinheit abgegebenen Energie bestimmen.

Die Emission hängt hauptsächlich von der Temperatur und von der Oberflächenbeschaffenheit des strahlenden Körpers ab. Im folgenden sollen diese beiden Punkte noch näher untersucht werden.

2. Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur.

Seit langem spielt in der Physik das Problem, nach welchem Gesetz nimmt die Temperatur eines frei in der Luft sich abkühlenden Körpers ab, eine Rolle. Bereits Newton beschäftigte sich mit dieser Frage und machte zu deren Lösung a priori die Annahme, daß die in der Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge proportional der Differenz zwischen der Temperatur des Körpers und derjenigen der Umgebung sei. Dies wurde auch scheinbar durch die Versuche von Kraft und Richmann (bis zu 50° C Temperaturerhöhung) bestätigt, und obwohl Martine (1740), später Dalton und andere bedeutende Abweichungen bei höheren Temperaturen fanden, nahmen doch lange die nachfolgenden Physiker durch Newtons Autorität bewogen das Gesetz $q_s = \text{const.}\ (\tau - \tau_0)$ (q_s = abgestrahlte Wärme, τ und τ_0 = Körper- bezw. Raumtemperatur) als streng bestätigte Wahrheit an.

Erst Dulong und Petit[4] brachten durch umfassende Versuche (niedergelegt in der preisgekrönten Arbeit: Des Recherches sur la Mesure des Températures et sur les Lois de la Communication de la Chaleur, Paris 1817) die Tatsache zur allgemeinen Anerkennung, daß die abgegebene Wärmemenge rascher wächst als die Temperaturdifferenz zwischen Körper und Luft. Bei den Versuchen von Dulong und Petit wurde die Ab-

kühlung eines Thermometers mit großer Kugel in einem Ballon beobachtet, der zuerst mit Luft oder anderen Gasen gefüllt und dann, um Wärmeabgabe durch Vermittlung der Luft zu eliminieren, leer gepumpt war. Dadurch wurde zuerst die sehr wichtige Scheidung zwischen der allein durch Strahlung und der allein durch Konvektion abgegebenen Wärme eingeführt. Dulong und Petit leiteten aus ihren Versuchen das bekannte Gesetz ab, wonach die durch Strahlung abgegebene Wärme $q_s = \text{const.}\ a^{\tau_0}(a^{\tau-\tau_0} - 1)$. Die Versuche von Dulong und Petit wurden später wiederholt und bestätigt.

In einer ausführlichen Kritik derselben kommt jedoch Stefan[5] (1879) zu dem Schlusse, daß die abgeleitete Formel nicht allgemein das Gesetz der Strahlung darstellen könne. Die Annahme von Dulong und Petit, daß bei leergepumptem Ballon nur reine Strahlung vorhanden sei, erwies sich nicht als zutreffend. Denn nach Kundt[37], Warbung sowie Winkelmann ist die Wärmeleitfähigkeit der Luft ziemlich unabhängig von ihrer Dichte, so daß auch bei stark evakuiertem Ballon eine verhältnismäßig beträchtliche Wärmeleitung durch die Luft noch stattfindet und nicht reine Strahlung vorhanden ist.*) Zugleich fand Stefan, daß nach den Versuchen von Tyndall die ausgestrahlte Energie proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur sein müsse, also

$$q_s = \text{const.}\ (T^4 - T_0^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieses Gesetz wurde später von Boltzmann für den absolut schwarzen Körper auf thermodynamischer Grundlage abgeleitet und in neuerer Zeit durch exakte Messungen von Lummer und Pringsheim[7] bis 1300° C bestätigt. Es gilt nur für den absolut schwarzen Körper; bei beliebigen materiellen Körpern tritt eine Modifikation ein. So haben Lummer und Kurlbaum[8] gefunden, daß die Gesamtstrahlung des reinen Platins mit der fünften, diejenige von Kohle und Eisenoxyd mit einer zwischen der vierten und fünften liegenden Potenz der absoluten Temperatur zunimmt.

Für das bei elektrischen Maschinen in Betracht kommende Temperaturgebiet von 0—100° C ist diese Unsicherheit belanglos; denn gerade diejenigen Körper, bei welchen die durch Strahlung

*) In neuester Zeit wurden ähnliche Versuche von Wamsler ausgeführt; die Wärmeleitung durch Luft ist dabei rechnerisch berücksichtigt. Dadurch ergaben sich Korrekturen bis zu 30% für Leitung.

Wamsler, Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft. Dissertation München 1909.

abgegebene Wärmemenge beträchtlich ist, nähern sich soweit dem absolut schwarzen Körper, daß innerhalb der geringen Grenzen eine Umrechnung nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz zulässig erscheint. Nachstehend ist der Verlauf der Funktion const. $(T^4 - T_0^4)$ für $T_0 = 273^0$ ($\tau_0 = 0^0$ C) und $T = 273$ bis 473^0 ($\tau = 0$ bis 200^0 C) dargestellt. Die Konstante ist gleich $5{,}30 \cdot 10^{-8}$ $\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\ {}^0\text{C}}$

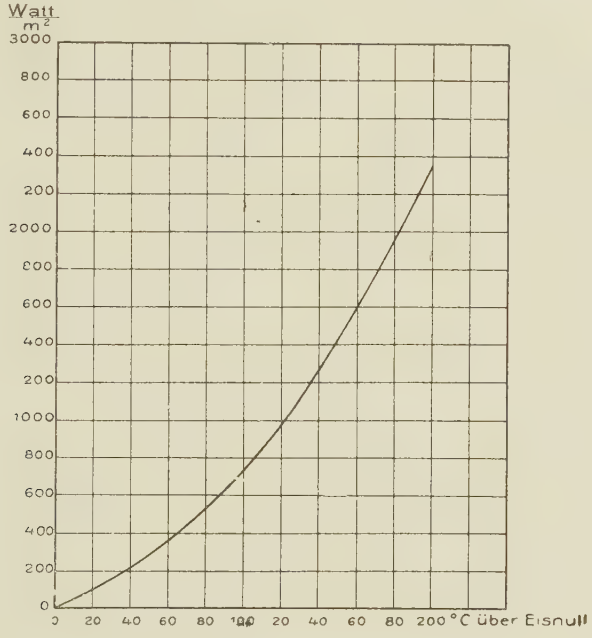


Fig. 1. Strahlung nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz.

gesetzt. (Vergl. hierüber den folgenden Paragraphen über Strahlungskonstanten.)

Für 0^0 C Umgebungstemperatur kann man daraus direkt die bei τ^0 C Körpertemperatur ausgestrahlte Wärme entnehmen. Bei beliebiger Umgebungstemperatur τ_0 ist hiervon der τ_0 entsprechende Betrag an Wärmestrahlung (ebenfalls direkt der Kurve zu entnehmen für $\tau = \tau_0$) abzuziehen. Man sieht aus dem Verlauf der Kurve, daß die abgestrahlte Energie bedeutend rascher als die Temperaturdifferenz wächst.

Bis zu Temperaturen von $100\ ^0$C läßt sich näherungsweise das Strahlungsnetz in einer bequemeren Form, die zugleich der üblichen Rechnungsweise mehr entspricht, darstellen. Man setzt die durch Strahlung abgegebene Wärmemenge

$$q_s = e \cdot (\tau - \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei die Strahlungskonstante e abhängig von τ und τ_0 sein soll; es ist dies also eine verbesserte Form des Newtonschen Gesetzes.

Bezeichnet man die bei 1° C Körpertemperatur und 0° C Raumtemperatur pro Zeit- und Flächeneinheit ausgestrahlte Energie als das Emissionsvermögen e_0 bei 0° C, so ist, wie sich aus Fig. 1 ergibt, für das Temperaturgebiet 0—100° C der entsprechende Wert e_{τ_0} bei τ_0° C Raumtemperatur näherungsweise

$$e_{\tau_0} = e_0 \ (1 + 0{,}012 \ \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

Es ist demnach die bei 1° C Temperaturdifferenz ausgestrahlte Wärmemenge bei 30° C Raumtemperatur bereits 36% größer als bei 0° C.

Wenn ferner die Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung größer als 1° C ist, so steigt das Emissionsvermögen auch noch mit der Temperaturdifferenz und zwar mit dem Faktor $(1 + 0{,}0062 \ [\tau - \tau_0])$. Es wird also der in Formel (2) einzusetzende Wert

$$e = e_0 \ (1 + 0{,}012 \ \tau_0) \ (1 + 0{,}0062 \ [\tau - \tau_0]) \quad . \quad . \quad (2\,b)$$

wobei e_0 die bei 1° C Körper- und 0° C Raumtemperatur pro Zeit- und Flächeneinheit ausgestrahlte Wärmemenge bedeutet. Man sieht hieraus, daß der von Newton konstant angenommene Faktor wenigstens für die Strahlung bedeutend mit der Temperatur steigt. Ist z. B. $\tau_0 = 20°$ C und $\tau = 100°$ C, so wird $e = e_0 \cdot 1{,}24 \cdot 1{,}50 = e_0 \cdot 1{,}85$, also um 85% größer als bei 0° C Raumtemperatur und 1° C Körpertemperatur.

3. Die Strahlungskonstanten.

Das Emissionsvermögen der verschiedenen Körper ist innerhalb weiter Grenzen veränderlich und hängt stark von der Oberflächenbeschaffenheit ab.

Die ersten Versuche hierüber stammen von Leslie[9] (1804). Als strahlender Körper diente dabei ein mit siedendem Wasser gefüllter Würfel (Lesliescher Würfel), dessen eine Seite berußt war, während die übrigen Seiten mit dem zu untersuchenden Material belegt waren. Die Intensität der Strahlung wurde mit einem Differentialthermometer gemessen; es war dies ein Luftthermometer, dessen eine (bestrahlte) Kugel eine berußte Oberfläche hatte, während die zweite Kugel hinter einem Schirm geschützt lag. Melloni (1835) wiederholte die Versuche mit einer ähnlichen Anordnung, verwendete aber zur Bestimmung der Strahlungsintensität die empfindlichere Thermosäule.

Mit diesen Anordnungen konnten nur Relativwerte, bezogen auf die berußte Fläche als Vergleichsmaß, festgestellt werden. Es bilden daher die Versuche von Péclet[11] (1860), welcher die bei bestimmten Körperdimensionen abgestrahlte Wärmemenge ermittelte, eine wichtige Ergänzung. Ähnlich wie bei den Versuchen von Dulong und Petit[4] befanden sich dabei die Versuchskörper (Kugeln, Zylinder usw. mit heißem Wasser oder Quecksilber gefüllt) in einem geschwärzten Hohlraum; ebenso wurde die Wärmemenge aus der Abkühlungsgeschwindigkeit und dem Wasserwert des Versuchskörpers bestimmt. Um Strahlung und Konvektion zu trennen wurde jedoch nicht luftleer gepumpt, sondern der Versuchskörper erst berußt und bei einem zweiten Versuch blank poliert, so daß fast nur Konvektion vorhanden war. Die auch bei polierter Oberfläche nicht ganz zu beseitigende Strahlung wurde rechnerisch berücksichtigt, nachdem durch besondere Versuche ähnlich Leslie und Melloni das Verhältnis der Strahlung bei berußter und bei blanker Oberfläche ermittelt war. Diese Rechnung war jedoch nicht einwandfrei, da hierbei das Strahlungsgesetz von Dulong und Petit zugrunde gelegt wurde.

Da wie bereits erwähnt das Gesetz über die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur nicht für alle Körper dasselbe ist, kann man streng genommen die Emission verschiedener Körper nur bei gleicher Temperatur vergleichen. Innerhalb der Temperaturgrenzen 0—100° C weichen aber die verschiedenen Strahlungsgesetze nicht viel voneinander ab, so daß man in diesem Bereich z. B. das Strahlungsgesetz des absolut schwarzen Körpers, das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, als für alle Körper gültig annehmen und dann beliebige Körper mit dem absolut schwarzen vergleichen kann.

Es ist in neuerer Zeit gelungen die Strahlung des absolut schwarzen Körpers zu verwirklichen (Lummer[12] 1895) und die dabei abgestrahlte Wärmemenge numerisch zu bestimmen (Kurlbaum[13] 1898). Demnach ist bei T^0 Körper- und T_0^0 Raumtemperatur durch Strahlung abgegebene Wärmemenge

$$q_s = 5{,}30 \cdot 10^{-8} \, (T^4 - T_0^4) \, \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Für Umrechnung:

$$1 \text{ Watt} = 0{,}238 \, \frac{\text{gr. cal.}}{\text{sek.}} \text{ oder } \frac{1 \text{ gr. cal.}}{\text{sek.}} = 4{,}19 \text{ Watt}$$

oder nach der Näherungsformel:

$$q_s = e \, (\tau - \tau_0) \, \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2} \qquad \text{wobei}$$

$$e = 4{,}35 \cdot (1 + 0{,}012\ \tau_0)\left(1 + 0{,}0062\ [\tau - \tau_0]\right) \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\ {}^0\text{C}} \qquad (2\,c)$$

z. B. $\tau_0 = 20^0$ C, $\tau = 60^0$ C

$$e = 4{,}35 \cdot 1{,}24 \cdot 1{,}25 = 6{,}7 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\ {}^0\text{C}}.$$

Um für einen beliebigen Körper die abgestrahlte Wärmemenge zu bestimmen, muß man den für den absolut schwarzen Körper berechneten Betrag noch mit einem Faktor ν multiplizieren; da der absolut schwarze Körper nach seiner Definition das mögliche Maximum an Emission hat, muß dieser Faktor immer kleiner als 1 sein.

Die folgende Tabelle gibt die Werte von ν nach den Versuchen von Péclet[11], die in genügender Übereinstimmung mit denen von Leslie[3] und Melloni[10] stehen.

Versuche von Péclet.

Material	$\nu =$	Material	$\nu =$
Poliertes Silber	0,03	Verrostetes Blech	0,78
„ Kupfer	0,04	Verrostetes Roheisen	0,78
„ Zinn	0,05	Kohlenpulver	0,80
Vergoldetes Papier	0,05	Feiner Sand	0,84
Poliertes Zink	0,06	Bausteine	0,84
„ Messing	0,06	Gips	0,84
Versilbertes Papier	0,10	Holz	0,84
Poliertes Schwarzblech	0,10	Wollstoff	0,85
Verbleites Blech	0,15	Seidenstoff	0,85
Gewöhnliches Blech	0,65	Ölanstrich	0,87
Glas	0,68	Papier	0,88
Neues Roheisen	0,74	Kienruß	0,94
Gepulverte Kreide	0,76	Absolut schwarzer Körper	1

Außer den in der Tabelle enthaltenen Werten für feste Körper ist nach Péclet für

Flüssigkeiten: Wasserspiegel $\nu = 1{,}24$
Ölspiegel $\nu = 1{,}68$

Obwohl Werte $\nu > 1$ nicht möglich sind, ist doch auch durch andere Versuche gefunden worden, daß ein Wasser- oder Ölspiegel beträchtlich mehr Wärme abgibt als z. B. eine gleich große matte Metallfläche. Vermutlich ist die vermehrte Wärmeabgabe auf Verdampfung an der Oberfläche zurückzuführen.

Zum Vergleich sind auch noch die Werte angegeben, die sich aus den Versuchen von Wamsler (s. Fußnote auf S. 4) ergeben und für polierte Körper beträchtlich von den Pécletschen Zahlen abweichen. Da die Berechnung der Pécletschen Versuche nicht ganz einwandfrei ist, muß wohl den Wamslerschen Werten der Vorzug gegeben werden.

Versuche von Wamsler.

Material	ν
Kupfer poliert	0,17
Zink matt	0,21
Messing matt	0,23
Schmiedeeisen hochpoliert	0,29
Kalkmörtel	0,93
Schmiedeeisen matt	0,95
Lampenruß	0,96
Gußeisen rauh	0,97

Die Werte der Tabellen können nur einen Anhalt für die Klassifikation der verschiedenen Körper geben; denn der Zustand der Oberfläche, welcher auf die Emission von größtem Einfluß ist, kann in den meisten Fällen nicht genügend definiert werden. Im allgemeinen gilt der Satz, je dichter die Oberfläche ist, desto geringer ist das Strahlungsvermögen. Man kann dementsprechend zwei Hauptgruppen unterscheiden; die sogenannten blanken Körper, z. B. polierte Metalle, bei welchen das Emissionsvermögen nur etwa 15% von demjenigen des absolut schwarzen Körpers beträgt; die meisten anderen Körper, von denen hier hauptsächlich rohes oder gestrichenes Metall, Papier, Wollstoffe usw. interessieren, nähern sich in ihrem Verhalten mehr dem schwarzen Körper und haben etwa 90% von dessen Emissionsvermögen.

Beim Gebrauch obiger Werte ist zu beachten, daß dieselben nur gelten, wenn der Körper frei in der Luft emittiert oder einen schwarzen Körper bestrahlt; andernfalls wird ein Teil der Energie reflektiert. Für die meisten praktischen Fälle, bei welchen es sich immer um Näherungsrechnung handelt, ist die auftretende Reflexion zu vernachlässigen.

Abschnitt II.

Wärmeübergang durch Leitung und Konvektion.

Ein Körper befinde sich frei in der ruhigen Atmosphäre und werde durch eine im Innern befindliche Wärmequelle so geheizt, daß pro Zeiteinheit immer die gleiche Wärmemenge produziert wird. Die Oberfläche des Körpers soll so beschaffen sein, daß keine Strahlung möglich ist. Es muß dann die gesamte Wärme durch Vermittlung der einhüllenden Luftmasse abgegeben werden. Wie die Erfahrung zeigt, steigt die Temperatur des Körpers allmählich und erreicht schließlich einen konstanten Wert. Untersucht man die Temperaturen der umgebenden Luft an verschiedenen Punkten, so stellt sich heraus, daß in größerer Entfernung vom Körper die Temperatur während des Versuchs sich nicht merkbar geändert hat. Man kann sich dem Körper von der Seite ziemlich nähern, ehe eine Änderung der Lufttemperatur fühlbar wird. Erst ganz dicht am Körper steigt die Lufttemperatur stark an.

Auf Grund dieser Tatsache ist man zu der Auffassung gelangt, daß eine dünne, dem Körper anhaftende Luftschicht dem Wärmeübergang großen Widerstand entgegensetzt, zu dessen Überwindung fast die ganze Temperaturdifferenz zwischen Körperoberfläche und Luft in der Umgebung erforderlich ist.

Dementsprechend sollte die von einem Oberflächenelement pro Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge

$$\Delta Q = \Delta F \alpha (\tau - \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sein (ähnlich wie bei der Strahlung), wobei τ die Temperatur des Flächenelements, τ_0 die Temperatur der Umgebung und α der reziproke Wert jenes Übergangswiderstandes, also ein Leitvermögen bezeichnet. Dem neueren Sprachgebrauche folgend soll α die Wärmeübergangszahl genannt werden.

Hat der Körper an allen Stellen der Oberfläche gleiche Temperatur, so ist die von der ganzen Oberfläche F abgegebene Wärmemenge

$$Q = F \alpha (\tau - \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich, wenn jetzt die Atmosphäre nicht mehr ruhig ist, sondern z. B. Wind geht. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß sich dabei die Luft gleichmäßig mit der konstanten Geschwindigkeit v gegen den Körper bewege. Erfahrungsgemäß wird hierdurch der Wärmeübergang erleichtert; es ist keine so große Temperaturdifferenz

mehr notwendig, um die gleiche Wärmenge wie bei ruhiger Luft von der Körperoberfläche fortzuschaffen. Dementsprechend sinkt die Temperatur des Körpers auf einen niedrigeren Wert. Die Temperaturverteilung in der umgebenden Luft ist aber ähnlich wie bei ruhiger Atmosphäre. In größerer Entfernung vom Körper bleibt die Lufttemperatur ungeändert, erst ganz dicht am Körper ist ein schneller Temperaturanstieg bemerkbar.

Man hat daher auch für diesen Fall angenommen, daß trotz der Bewegung der Luft eine dünne Schicht durch Reibung am Körper festgehalten wird und dem Wärmeübergang erheblichen Widerstand entgegensetzt, während die weitere Ausbreitung der Wärme in der Luftmasse selbst verhältnismäßig leicht möglich ist.

Die Berechnung der von einem Oberflächenelement abgegebenen Wärmenge kann dann mittels der obigen Gleichung (3)

$$\Delta Q = \Delta F \alpha (\tau - \tau_0)$$

erfolgen, nur daß die Wärmeübergangszahl α von der Luftgeschwindigkeit v abhängig ist und damit etwa in der Form

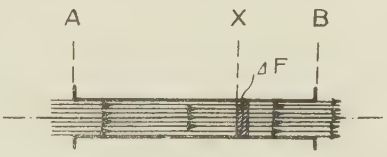


Fig. 2.

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 + f[v]\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

steigt.

Auch die von der ganzen Oberfläche abgegebene Wärme ist, wenn alle Oberflächenelemente gleiche Temperatur haben, einfach berechenbar in der Form

$$Q = F\alpha (\tau - \tau_0),$$

wobei dann für α ein entsprechend der Geschwindigkeit erhöhter Wert einzusetzen ist.

Der Wärmeübergang auf bewegte Luft spielt in der Technik eine große Rolle bei der Konstruktion der Heiz- und Kühlapparate. In der einfachsten Anordnung wird durch einen Kanal oder durch ein Rohr (vgl. Fig. 2), deren Wandungen erhitzt sind, Luft geblasen. Der Unterschied gegenüber einem frei im Wind befindlichen Körper ist der, daß die Ausdehnung der Luft quer zur Strömungsrichtung nicht mehr unendlich ist. Infolgedessen macht sich auch für die am weitesten von der Innenfläche entfernten Stellen, also die Punkte in der Rohrachse, der Einfluß der geheizten Wand bemerkbar. Die Lufttemperatur ist an keiner Stelle mehr die gleiche wie vor dem Eintritt in das Rohr, sondern steigt beim Vorrücken von A nach B.

Man hat nun die oben entwickelten Anschauungen über den Wärmeübergang auch auf diesen Fall übertragen und nimmt an, daß eine dünne Luftschicht an der Heizfläche haftet, die fast das ganze Temperaturgefälle benötigt, während in der Luftmasse selbst durch Mischung eine mittlere Temperatur sich einstellt, die von A nach B wächst.

Die von einem Oberflächenelement an der Stelle X abgegebene Wärme ist dann wieder darstellbar in der Form:

$$\Delta Q = \Delta F \alpha \, (\tau_W - \tau_L) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 3a)}$$

wobei τ_W die Wandtemperatur und τ_L die mittlere Lufttemperatur an der Stelle X bedeutet. Der Faktor α ist wieder der reziproke Wert des Übergangswiderstandes und ist abhängig von der Luftgeschwindigkeit.

Dagegen ist, wenn wieder alle Flächenelemente gleiche Temperatur haben, die Berechnung der von der ganzen Fläche F abgegebenen Wärmemenge nicht mehr in der einfachen Form $Q = F\alpha \, (\tau - \tau_0)$ möglich, da die Temperaturdifferenz $(\tau_W - \tau_L)$ zwischen Heizfläche und der angrenzenden Luft von Stelle zu Stelle sich ändert. Wie wohl zuerst Thomson (1861) (in einem Briefe an Joule[16]) angegeben hat, muß man erst mittels Differentialgleichung die Lufttemperaturen τ_L bestimmen und erhält dann die gesamte Wärmemenge in der Form:

$$Q = W \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha F}{W}}\right) (\tau - \tau_0) \, . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 6)}$$

Hierbei bedeutet W den Wasserwert (= Gewicht · spez. Wärme) der sekundlich durch den Kanal strömenden Luftmenge, τ die Heizflächentemperatur und τ_0 die Lufttemperatur beim Eintritt in den Kanal.

Es ist dies besonders zu beachten, da auch in solchen Fällen manchmal nach der Gleichung

$$Q = F\alpha \, (\tau - \tau_0)$$

gerechnet wird.

Die Wärmeübergangszahl α ist durch Versuch zu bestimmen. Wie im folgenden näher beschrieben (Seite 29 u. f.), hat man auch, oft mit bedeutendem finanziellen Aufwand, zahlreiche Messungen ausgeführt. Das Ergebnis war aber wenig befriedigend. Die gemessenen Werte von α schwankten in weiten Grenzen und auch für die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ergab sich keine eindeutige Funktion, da nach einer Reihe von Versuchen

$$\alpha = \alpha_0 \, (1 + \text{const.} \sqrt{v})$$

sein sollte, während aus anderen Versuchen

$$\alpha = \alpha_0 \, (1 + \text{const. } v)$$

sich ergab.

Diese Widersprüche legen den Gedanken nahe, daß eben doch die grundlegende Gleichung

$$\Delta Q = \Delta F \cdot \alpha \, (\tau_W - \tau_L),$$

die seit Jahrhunderten unbestritten allen wissenschaftlichen und praktischen Arbeiten als Basis gedient hat, in Wirklichkeit nicht erfüllt ist. Vermutlich ist für den Wärmeübergang nicht nur die an der Oberfläche haftende Luftschicht maßgebend, sondern es sind auch die weiter abliegenden Schichten noch von Einfluß.

Der Verfasser hat daher versucht, eine bessere Beschreibung der Vorgänge dadurch zu geben, daß er untersuchte, wie die Ausbreitung der Wärme in der Luftmasse selbst, also nach ihrem Übertritt von der Oberfläche, erfolgt.

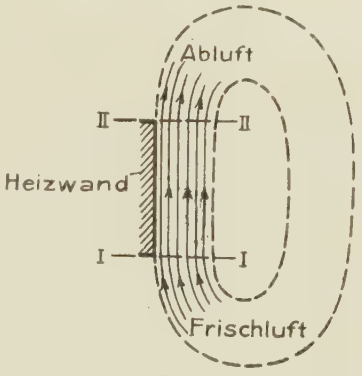


Fig. 3.

Es ist zunächst die Tatsache zu bemerken, daß auch in der an sich ruhigen Atmosphäre in der Nähe eines erhitzten Körpers Luftbewegungen auftreten. Ähnlich wie bei zwei sich berührenden Körpern geht durch Leitung Wärme von der Oberfläche auf die benachbarten Luftschichten über. Die angewärmte Luft ist leichter als diejenige der Umgebung und steigt daher durch Auftrieb in die Höhe, während zum Ersatz von unten kalte Luft heranströmen muß, ähnlich Fig. 3. Die nach oben steigende Abluft kühlt sich allmählich ab, sinkt dadurch in tiefere Schichten und gelangt schließlich wieder in die Frischluftströmung, so daß ein Kreislauf eintritt.

Man sieht hieraus, daß Wärmeübergang auf ruhige Luft in der Natur eigentlich gar nicht vorkommt. Es ist immer Luftbewegung vorhanden, entweder durch fremde Ursachen, wenn ein Körper im Winde sich abkühlt oder künstlich angeblasen wird, oder selbsttätig durch den Auftrieb der erwärmten Luftschichten.

In allen Fällen geht die Wärme von der Körperoberfläche auf die vorbeistreichende Luft über und wird von dem Luftstrom fortgetragen. Man nennt diese Art der Fortbewegung der Wärme Konvektion und zwar natürliche Konvektion, wenn die Luft-

bewegung durch den Auftrieb der erwärmten Luft selbst hervorgerufen wird, und künstliche Konvektion oder künstliche Kühlung, wenn die Luftbewegung durch andere Ursachen hervorgerufen ist.

Der Wärmeübergang von einem Körper auf Luft erfolgt daher allgemein nach dem idealisierenden Schema Fig. 3. Sobald Frischluft den Querschnitt $I—I$ passiert, beginnt die Einwirkung der Heizfläche H. Es dringt Wärme in die Luft ein, die Temperatur der Luft steigt und zwar dauert dies so lange, bis der Querschnitt $II—II$ erreicht ist. Auf dem weiteren Wege mischt sich die erwärmte Luft mit kalter Luft der Umgebung oder wird auf andere Weise abgekühlt und gelangt schließlich wieder in die Frischluftströmung.

Praktisch wird nun die Frage gestellt, wieviel Wärme geht auf den Luftstrom über. Nach einer längst eingeführten Rechnungsweise ist dieser Betrag einfach aus der Temperaturzunahme auf dem Wege $I—II$ und der spez. Wärme der Luft (also auf kalorimetrischem Weg) zu bestimmen. Es muß sein

$$Q = G \cdot c_p \, (\tau_{II} - \tau_I) = V\gamma \cdot c_p \, (\tau_{II} - \tau_I) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wobei G das sekundlich strömende Luftgewicht, V das sekundlich bewegte Luftvolumen, γ das zugehörige spez. Gewicht, c_p die spez. Wärme bei konst. Druck, τ_I die Frischlufttemperatur und τ_{II} die mittlere Ablufttemperatur (nach inniger Mischung) bezeichnet. Für G in kg/sek. und $c_p = 0{,}24$ kal/kg wird

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0{,}24 \; G \; (\tau_{II} - \tau_I) \text{ Kalorien} \\ \text{oder} = \quad G \; (\tau_{II} - \tau_I) \text{ Kilowatt} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a)$$

Das Volumen V ändert sich zwischen den Querschnitten $I—I$ und $II—II$. Rechnet man mit einem Mittelwert von V in cbm/sek. und setzt für mittlere Verhältnisse $\gamma = 1{,}1$ kg/cbm entsprechend normalen Luftdruck und 50^0 C Lufttemperatur, ist auch

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0{,}26 \; V \cdot (\tau_{II} - \tau_I) \text{ Kalorien} \\ = 1{,}1 \quad V \; (\tau_{II} - \tau_I) \text{ Kilowatt} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7\,b)$$

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die mittlere Ablufttemperatur τ_{II} zu bestimmen, da τ_I als gegeben zu betrachten ist.

In vielen praktischen Fällen kann die Ablufttemperatur τ_{II} auf Grund von ähnlichen Versuchen genügend genau geschätzt werden, da sie zwischen der Frischlufttemperatur τ_I und der Heizwandtemperatur τ_W liegen muß und erfahrungsgemäß nur wenig innerhalb dieser Grenzen schwankt. Es ergibt sich damit eine

sehr einfache und daher praktisch wichtige Methode zur Bestimmung von Q.

Dagegen macht die Vorausberechnung von τ_{II} ziemliche Schwierigkeiten. Es soll daher nur der einfachste Fall betrachtet werden, daß an einer ebenen Heizfläche, die an allen Stellen gleiche Temperatur hat, Luft mit einer gegebenen mittleren Geschwindigkeit entlangstreicht. Die Lösung dieser Aufgabe ist im folgenden in drei Stufen ausgeführt.

Es wird zunächst untersucht, wie die Wärme von einer ebenen Heizfläche auf ruhende Luft übergeht und sich in der Luft weiter ausbreitet. Dabei sollen die einzelnen Luftteilchen weder gegen die Heizwand noch gegeneinander sich bewegen können. Die Luft würde sich also wie ein fester homogener Körper verhalten, der dicht an der Wand anliegt. Wie bereits bemerkt, tritt dieser Fall in Wirklichkeit niemals auf, sondern ist zur Vereinfachung der Untersuchung angenommen.

Wenn jetzt die Luftmasse als Ganzes an der Heizwand entlanggeschoben wird, ohne daß die einzelnen Luftteilchen ihre gegenseitige Lage verändern, so ist es gerade so, wie wenn zwei feste Körper mit ebener Berührungsfläche dicht aneinander gleiten. Die Ausbreitung der Wärme in der bewegten Luft muß daher ebenso erfolgen, wie wenn die Luft in Ruhe wäre. Damit ist ohne weitere Rechnung der Fall gelöst, daß Luft gleichmäßig an einer Heizwand vorbeiströmt, also die Luftteilchen Bahnen parallel zur Heizfläche mit konstanter Geschwindigkeit beschreiben.

In Wirklichkeit ist dieser einfache Strömungszustand nicht vorhanden. Zunächst wird durch äußere Reibung die unmittelbar berührende Luftschicht zurückgehalten; wegen der inneren Reibung der Luft macht sich dies aber auch auf die weiter abliegenden Schichten noch bemerkbar, so daß erst in größerem Abstande gleichmäßige Strömung vorhanden ist. Außerdem wird dieser Bewegungszustand von einer gewissen Geschwindigkeit an labil; die Luftteilchen weichen beliebig von den früher parallelen Bahnen ab und bewegen sich durcheinander (turbulente Bewegung). Die Voraussetzungen der bisherigen Betrachtungen sind also nicht ohne weiteres als erfüllt anzusehen. Durch Nachrechnung einer Reihe von Versuchen hat sich aber gezeigt, daß näherungsweise der Einfluß der Reibung an der Heizfläche und die Mischwirkung der Turbulenz berücksichtigt werden können, wenn an Stelle des wirklichen inneren Wärmeleitungsvermögens der Luft ein scheinbares vergrößertes Leitvermögen eingesetzt wird. Nach allen bisherigen

Versuchen ist dieses scheinbare Leitvermögen eindeutig Funktion der Geschwindigkeit und hängt auch davon ab, in welchem Abstand von der Heizfläche der Luftstrom durch eine Wand begrenzt ist.

1. Wärmeübergang auf ruhende Luft.

Es sei zunächst das Problem behandelt: Eine ebene Wand grenzt an Luft, deren Temperatur zurzeit $t = 0$ überall $= \tau_0$ sein soll. Die Wand wird plötzlich auf die Temperatur τ_W gebracht und dauernd auf derselben gehalten. Es ist die Temperatur eines beliebigen Luftteilchens abhängig von Zeit und Ort zu bestimmen, vorausgesetzt daß die Luftteilchen ihre gegenseitige Lage nicht ändern.

Man hat früher geglaubt, daß in Gasen Wärmebewegung nur durch Konvektion möglich sei, daß es also keine Wärmeleitung wie in einem festen Körper gebe. Tatsächlich kommt der Fall der reinen Leitung in Gasen fast nie vor, da bei Temperaturdifferenzen sofort Konvektionsströme auftreten. Es bedarf daher besonderer Vorsichtsmaßregeln, um reine Leitung herzustellen und das Leitvermögen nachweisen zu können. Genauere Messungen hierüber wurden von Stefan, Kundt und Warburg, und Winkelmann unternommen. Darnach verhalten sich z. B. die Leitvermögen von Eisen : Wasser : Luft wie $1 : {}^1/_{130} : {}^1/_{3300}$. Man kann also für die oben angenommene Bedingung, daß die Luftteilchen in Ruhe bleiben, die Ausbreitung der Wärme in einem Gas mittels der Differentialgleichung der Wärmeleitung wie für einen festen Körper verfolgen.

Die Wand soll so ausgedehnt sein, daß man von einer Randwirkung absehen kann. Diese Bedingung ist für viele praktische Fälle erfüllt; andernfalls gibt diese Annahme wenigstens einen ungefähren Anhalt. Es werden dann alle Punkte, die in einer Ebene parallel zur Wand liegen, gleiche Temperatur haben, so daß es genügt, die Temperatur einer dünnen Schicht parallel zur Wand in Abhängigkeit von der Entfernung von der Wand zu untersuchen. Dies vereinfacht die Rechnung bedeutend (eindimensionales Problem).

Zum Ansatz der Differentialgleichung für den Vorgang führt die Bedingung, daß die Differenz der in ein Volumenelement eintretenden und der aus demselben austretenden Wärmemenge zur Temperaturerhöhung des Teilchens verwendet wird.

Im vorliegenden Falle strömt die Wärme nur in einer Richtung, nämlich senkrecht von der Wand. Ein endlich kleines Volumenelement habe die Dicke Δx in der Strömungsrichtung und die Querschnittsfläche = 1 senkrecht dazu. In der Eintrittsfläche an der Stelle $x = x_1$ (vgl. Fig. 4 und Fig. 4a) ist das Temperaturgefälle

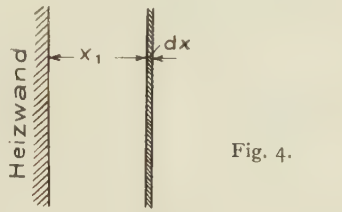


Fig. 4.

$$-\frac{\Delta\tau_1}{\Delta x} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{x_1}$$

und in der Austrittsfläche an der Stelle $x = x_1 + \Delta x = x_2$ das Temperaturgefälle

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta x} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{x_2}$$

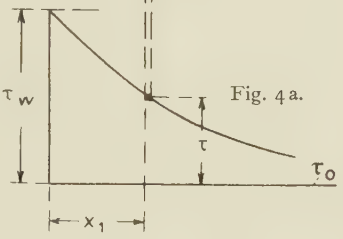


Fig. 4a.

(Partielle Differentialquotienten, weil die Temperatur Funktion des Abstandes x und der Zeit t ist.)

Bezeichnet man ferner mit k das Wärmeleitvermögen der ruhenden Luft, so ist in der Zeiteinheit die

$$\text{eintretende Wärme} = k\frac{\Delta\tau_1}{\Delta x} \qquad \text{oder} = k\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{x_1}$$

$$\text{austretende Wärme} = k\frac{\Delta\tau_2}{\Delta x} \qquad \text{oder} = k\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{x_2}$$

$$\text{Differenz} = k\frac{\Delta\tau_1}{\Delta x} - k\frac{\Delta\tau_2}{\Delta x}$$

$$= k\left(\frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2}{\Delta x^2}\right)\cdot\Delta x \qquad = k\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\right)\Delta x$$

Dieser Betrag dient zur Temperaturerhöhung des Volumenelements; steigt dabei in der Zeit Δt die Temperatur um $\Delta\tau$, so ist die von dem Volumen $\Delta x \cdot 1$ in der Zeiteinheit

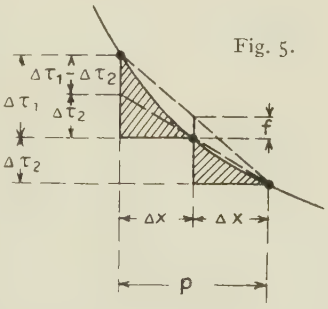


Fig. 5.

$$\text{aufgenommene Wärme} = \frac{\Delta\tau \cdot c \cdot s \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$= cs\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\Delta x$$

(c = spez. Wärme, s = spez. Gewicht bezw. Dichte).

Durch Gleichsetzen beider Beträge ergibt sich

$$k\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} = cs\frac{\partial\tau}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Es ist dies eine spezielle Form (eindimensional) der bekannten Hauptgleichung der Wärmeleitung.

Zur Bestimmung der Funktion $\tau = F(x, t)$ bestehen noch die Grenzbedingungen:

$\tau = \tau_0 = 0$ für $t = 0$ an allen Stellen mit Ausnahme von $x = 0$.

$\tau = \tau_w$ „ $t = \infty$ „ „ „

$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ „ $x = \infty$ zu allen Zeiten.

Die Lösung der Gleichung, auf welche hier nicht näher ein-

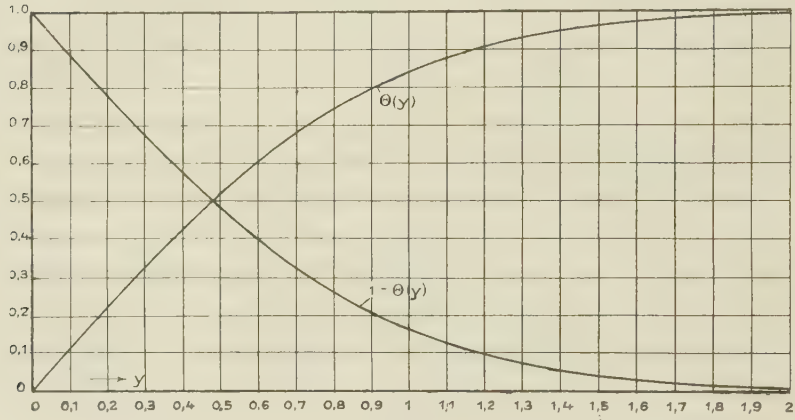


Fig. 6 Funktion $\Theta(y)$.

gegangen werden kann, findet sich bereits bei Fourier[14]. Dabei ergibt sich

$$\tau = \tau_w \left(1 - \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{cs}}}\right)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{cs}}} = y$, so bedeutet Funktion $\Theta(y)$ den Wert des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du$, ist also ein Zeichen für eine nicht weiter ausführbare Operation, wie z. B. sin, log. Ähnlich wie für diese, hat man die Werte der Funktion $\Theta(y)$, die auch bei anderen Problemen eine Rolle spielt, berechnet und in Tafeln niedergelegt. Die folgende graphische Darstellung zeigt den Verlauf der Funktion $\Theta(y)$ (Fig. 6).

Aus der Lösung $\tau = \tau_w \left(1 - \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{cs}}}\right)\right)$ lassen sich ohne

weiteres einige wichtige Schlüsse über die Verteilung und den Verlauf der Temperatur ziehen. Sämtliche Temperaturen sind proportional der Wandtemperatur τ_w; es soll daher im folgenden immer $\tau_w = 1$ gesetzt werden, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist.

Faßt man einen bestimmten Zeitmoment $t = t_1$ ins Auge, so wird $\tau = 1 - \Theta(C_1 x)$, wenn man die konstanten Größen in die konstante C_1 zusammenfaßt. Der Verlauf der Temperatur, abhängig vom Abstand x von der Wand, wird also dargestellt durch eine Kurve, die der Funktion $1 - \Theta(y)$ ähnlich ist. Man erhält daher auch für verschiedene Zeitpunkte t_1, t_2, t_3 lauter ähnliche Kurven, die durch Dehnung der Abszissenachse erzeugt werden können.

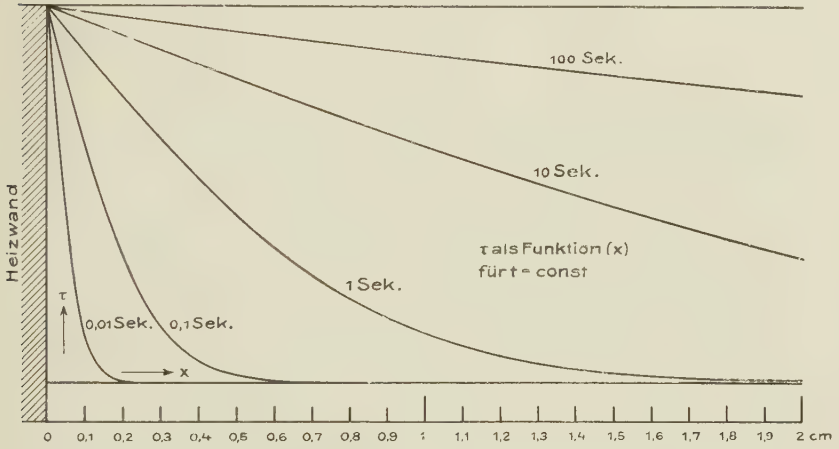


Fig. 7. Erwärmung der Luft abhängig von der Zeit.

Die Kurven schneiden sich alle im Punkte $x = 0$; $\tau = \tau_w$. Es existiert also nicht ein Temperatursprung, wie man leicht anzunehmen geneigt ist. Mit der Entfernung von der Wand nimmt die Temperatur anfangs ziemlich nach einer Geraden ab.

Man erkennt ferner, daß τ konstant ist, wenn der Ausdruck $\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{cs}}}$ konstant ist oder wenn $x = C_2\sqrt{t}$, das Fortschreiten der Temperaturkurven $\tau = \text{const.}$ erfolgt also proportional der Wurzel aus der Zeit. Ist also z. B. in 1 cm Abstand nach t_1 Sek. die Temperatur eines Teilchens $= \tau_1$, so dauert es 4 t_1 Sek. bis in 2 cm Abstand die Temperatur τ_1 sich einstellt. Die Erwärmung der der Wand nächstliegenden Schichten erfolgt daher sehr schnell,

während in größerer Entfernung erst nach sehr langer Zeit eine Temperaturerhöhung bemerkbar wird. Unter Zugrundelegung der für Luft gültigen Werte, bezogen auf die meistens in Frage kommende mittlere Temperatur der Luftmasse von 50° C:

$$k = 0{,}000056 \ \frac{\text{gr.cal.}}{\text{sek. cm } {}^0\text{C}}; \quad \text{(nach Wüllner)}$$

$$s = 0{,}0011 \ \frac{\text{gr.}}{\text{cm}^3}; \quad c = 0{,}24 \ \frac{\text{gr.cal.}}{\text{gr. } {}^0\text{C}};$$

wird

$$\tau = 1 - \Theta\left(1{,}08 \ \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

In Figur 7 ist der Verlauf der Temperatur abhängig von Ort und Zeit dargestellt.

Die vorstehende Lösung der Differentialgleichung

$$k \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

ist für den Ingenieur insofern unbefriedigend, als sie nur eine Zurückführung auf die ihm wenig geläufige Hilfsfunktion $\Theta(y)$ bedeutet. Im folgenden soll daher noch eine zweite Lösung auf graphischem Wege gegeben werden, die unter ausschließlicher Benützung elementarer Hilfsmittel zugleich einen sehr guten Einblick in den Vorgang gewährt.

Die Differentialgleichung $k \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = cs \frac{\partial \tau}{\partial t}$ nimmt bei endlich kleinen Größen die Form an: $k\left(\frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2}{\Delta x^2}\right) = cs \frac{\Delta\tau}{\Delta t}$ (Vgl. Seite 17). Ist nun für einen bestimmten Zeitmoment die Temperaturkurve $\tau = f(x)$ graphisch gegeben, so können für ein beliebig angenommenes Δx die Größen $\Delta\tau_1$ und $\Delta\tau_2$ aus der Zeichnung entnommen werden.

Setzt man nach Fig. 5 $2\Delta x = p$ und (auf Grund ähnlicher Dreiecke) $\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2 = 2f$, so wird

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2}{\Delta x^2} = \frac{8f}{p^2}. \quad . \quad (10)$$

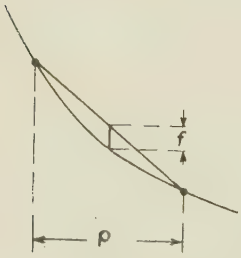


Fig. 8.

Es kann also allgemein bei graphisch gegebenen Funktionen der zweite Differentialquotient bestimmt werden in der Form

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{8f}{p^2},$$

wobei p die Projektion einer beliebigen Sehne (s. Fig. 8) und f die aus der Zeichnung zu

entnehmende Pfeilhöhe zwischen Sehne und Bogen bedeutet. Dies gilt strenggenommen nur für unendlich kleine Sehnen. Man überzeugt sich aber leicht, daß selbst bei Sehnen von größerer Länge, wie sie zur Ausführung der Konstruktion erforderlich sind, der Fehler praktisch verschwindend ist.

Durch Einführung des obigen Ausdrucks für den zweiten Differentialquotienten geht die Differentialgleichung über in die Form:

$$k \frac{8f}{p^2} = cs \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

Hieraus berechnet sich

$$\Delta\tau = \frac{k}{cs} \frac{8f}{p^2} \cdot \Delta t$$

oder wenn man für alle Punkte Sehnen von konstanter Projektion p annimmt $\Delta\tau = C_1 \cdot f \cdot \Delta t$.

Ist also zu irgendeiner Zeit die Verteilung der Temperatur abhängig vom Abstand x von der Wand als $\tau = f(x)$ gegeben, so ergibt sich die Zunahme $\Delta\tau$ in der Zeit Δt an einer beliebigen Stelle aus der Gleichung $\Delta\tau = C_1 \cdot f \cdot \Delta t$; d. h. die Temperaturzunahme ist proportional dem Pfeil f. Wählt man $\Delta t = \frac{1}{C_1}$, so wird $\Delta\tau = f$. Die Kurve, welche den Verlauf der Temperatur nach dieser Zeit darstellt, liegt also an jeder Stelle um den zugehörigen Pfeil höher als die ursprüngliche Kurve. Man kann daher die neue Temperaturkurve leicht ermitteln, indem man zur erst gegebenen Temperaturkurve lauter Sehnen mit beliebiger aber konstanter Projektion p zeiht. Die Mittelpunkte dieser Sehnen sind Punkte der neuen Temperaturkurve. Die Konstruktion gilt streng genommen nur für unendlich kleine Sehnen. Es ist dann aber auch die Sehne eine Tangente an die neue Temperaturkurve, so daß man mit dem gleichen Grade der Genauigkeit auch eine Temperaturkurve finden kann, indem man die Einhüllungskurve zu einer Sehnenschar zeichnet.

Es steht nun nichts im Wege, diese Konstruktion vom Zeitmomente $t = 0$ aus zu beginnen. Die Temperatur ist zur Zeit $t = 0$ an allen Stellen gleich Null; nur die der Wand unendlich nahe Schicht hat schon die Wandtemperatur. Die Kurve, welche den Verlauf zur Zeit $t = 0$ darstellt, besteht also aus einem Stück $\tau_w = 1$ der Ordinatenachse und der Abszissenachse von 0 bis ins Unendliche.

Man legt hierein (s. Fig. 9) von A ausgehend eine Sehne von der Projektion p; diese Sehne stellt in erster Annäherung eine

Temperaturkurve dar. Durch Wahl eines genügend großen Abszissenmaßstabes kann man die zugehörige Zeit sehr klein machen, so daß der Fehler verschwindend klein wird. Diese erste Kurve benützt man, um wiederum Sehnen zu legen; diese umhüllen eine bereits wesentlich verbesserte Temperaturkurve. Es zeigt sich dabei, daß nach mehrmaliger Wiederholung des Verfahrens, indem man immer wieder in die zuletzt erhaltene Kurve Sehnen von konstanter Projektion zieht, schließlich eine Kurve erhält, die von der bereits ermittelten Form $\tau = 1 - \Theta\,(C_1 x)$ kaum mehr zu unterscheiden ist.

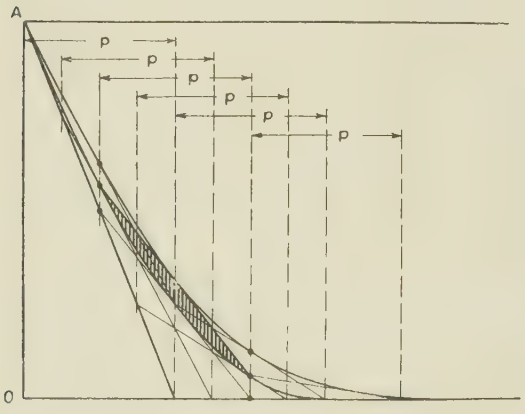


Fig. 9.

Hat man erst eine richtige Kurve gefunden, so braucht der weitere Verlauf nicht durch Fortsetzung der Sehnenkonstruktion ermittelt zu werden, sondern man kann einfach eine Schar von ähnlichen Kurven durch Dehnung der Abszissenachse entwickeln.

Denn denkt man sich erst eine Schar von Temperaturkurven für $t = 0$ bis $t = \infty$ mittels Sehnen von der Projektion p_1 konstruiert und dann dieses Bild mit sämtlichen Temperaturkurven und Sehnen in der Richtung der Abszissenachse gleichmäßig gedehnt, bis sämtliche Sehnen die Projektion p_2 angenommen haben, so sind in dem zweiten Bild die Temperaturkurven denen des ursprünglichen Bildes ähnlich geblieben. Man findet also im zweiten Bild an einer anderen Stelle eine Temperaturkurve, die einer der ursprünglichen konstruierten Schar ähnlich ist. Auch die Temperaturkurven des durch Dehnung entstandenen Bildes genügen der Differentialgleichung, denn man könnte es sich ebenso von vornherein mit Sehnen von der Projektion p_2 konstruiert denken. Durch passende Dehnung bezw. andere Wahl des Verhältnisses $p_2 : p_1$ kann man also aus einer Temperaturkurve eine Schar von anderen Kurven entwickeln, die sämtliche der Differentialgleichung genügen und alle unter sich ähnlich sind.

Aus Gleichung 8a:

$$k\frac{8f}{p^2}=cs\frac{\Delta\tau}{\Delta t}$$

findet man

$$\Delta t=\frac{cs}{k}\frac{\Delta\tau}{8f}\cdot p^2=C_1 p^2,$$

d. h. sämtliche Zeitelemente des gedehnten Bildes sind im Verhältnis $p_2^2:p_1^2$ vergrößert, während die Abszissen sich nur im einfachen Verhältnis $p_2:p_1$ geändert haben.

Für den vorliegenden Fall ergibt sich damit das bereits auf analytischem Wege gefundene Resultat, daß zu Temperaturkurven mit gleichem Abstand in der Abszissenrichtung quadratische Zeiten gehören und daß umgekehrt das Fortschreiten der Temperaturkurven in der Abszissenrichtung mit der Quadratwurzel aus der Zeit erfolgt.

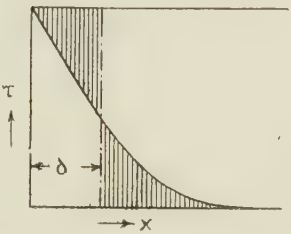


Fig. 10.

Die von der Heizfläche in die Luft eingedrungene Wärmemenge kann man durch Planemetrieren der unter einer Temperaturkurve liegenden Fläche (s. Fig. 10) bestimmen. Ist δ der Mittelwert der Abszissen (die schraffierten Flächen in Fig. 10 haben gleichen Inhalt), so wird die pro Flächeneinheit von der Heizwand in die Luft eindringende Wärmemenge

$$q_l=cs\,\delta.$$

Man kann δ als die äquivalente Schichtdicke bezeichnen.

Nach Fourier[14] ergibt sich auch auf analytischem Wege hierfür ein geschlossener Ausdruck. Es wird

$$q_l=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{cs\,kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

also für Luft mit:

$$c=0{,}24\ \frac{\text{gr.cal.}}{\text{gr. }^0\text{C}};\quad s=0{,}0011\ \frac{\text{gr.}}{\text{cm}^3};\quad k=0{,}000056\ \frac{\text{gr.cal.}}{\text{cm sek. }^0\text{C}};$$

$$q_l=1{,}37\sqrt{t}\ \frac{\text{gr.cal.}}{\text{m}^2\ ^0\text{C}}=5{,}7\sqrt{t}\ \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2\ ^0\text{C}} \quad . \quad . \quad (11a)$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich daraus die äquivalente Schichtdicke:

$$\underline{\delta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{cs}t}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

oder für Luft mit den bereits angegebenen Konstanten

$$\underline{\delta=0{,}52\sqrt{t}\ \text{cm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

Außer diesem einfachsten Fall soll zweitens das Problem für den Fall behandelt werden, daß die Ausbreitung der Wärme durch eine wärmedichte Wand parallel zur Heizfläche begrenzt wird. Man kann sich dies z. B. dadurch verwirklicht denken, daß zwei parallele Heizwände von gleicher Temperatur die zwischenliegende Luft erwärmen. Aus Symmetriegründen existiert dann eine Mittelebene parallel zu den Heizwänden; zu beiden Seiten der Mittelebene spielen sich die Vorgänge spiegelbildlich ab.

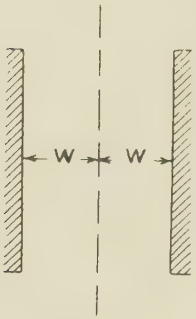


Fig. 11.

Die Differentialgleichung ist genau die gleiche wie bei dem bereits behandelten Fall, daß keine Grenzwand vorhanden ist, oder wie man sich auch vorstellen kann, daß diese unendlich entfernt ist:

$$k \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2} = cs \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Die Grenzbedingungen sind:

$\tau = \tau_0$ für $t = 0$ an allen Stellen ausgenommen $x = 0$

$\tau = \tau_w$ „ $t = \infty$ „ „ „

$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ „ $t = 0$ bis ∞ an der Stelle $x = W$.

Letzteres ist die Bedingung dafür, daß durch die Grenzwand keine Wärme strömt.

Über eine analytische Lösung dieses Problems ist nichts bekannt geworden. Es soll daher auch hier eine graphische Lösung durchgeführt werden auf Grund der in endlichen Größen geschriebenen Form der Differentialgleichung (8a)

$$k \frac{8 f}{p^2} = cs \frac{\Delta \tau}{\Delta t}$$

indem man aus einer gegebenen Temperaturkurve $\tau = F(x)$ für $t = \text{const.}$ mittels Sehnen von konstanter Projektion p die Temperaturkurve nach der Zeit Δt ermittelt.

Man kann genau so wie bereits auf Seite 21 angegeben die Konstruktion für den Zeitpunkt $t = 0$ beginnen; für genügend kleine Zeiten verläuft die Konstruktion ebenso wie wenn keine Grenzwand vorhanden wäre. Man kann daher bis zu dem Zeitpunkt, wo die Erwärmung an der Grenzwand meßbar wird, die bereits beim ersten Fall ermittelten Temperaturkurven direkt in die Zeichnung eintragen und braucht dann erst durch Sehnenkonstruktion weitere Temperaturkurven zu ermitteln.

An der Stelle $x = W$ müssen die Temperaturkurven horizontale Tangenten haben; man erreicht dies in einfacher Weise, indem man auch das Spiegelbild jenseits der Grenzwand mitzeichnet, also annimmt, daß zwei parallele Heizwände im Abstande $2\,W$ vorhanden sind. Im übrigen treten keine Besonderheiten bei der Fortsetzung des Verfahrens auf. Die Temperatur steigt in der Nähe der Grenzwand zuerst fast gleichmäßig an (s. Fig. 12), später erfolgt dies immer langsamer bis schließlich nach unendlich langer Zeit sich die Luft an allen Stellen bis zur Heizwandtemperatur erwärmt hat. Dieser letzte Teil des Verfahrens würde schließlich so viele Temperaturkurven ergeben, daß diese nicht mehr voneinander zu unterscheiden sind. Man überzeugt sich aber leicht, daß die zugehörigen Zeiten bereits so groß geworden sind, daß dieser Bereich ohne Interesse ist.

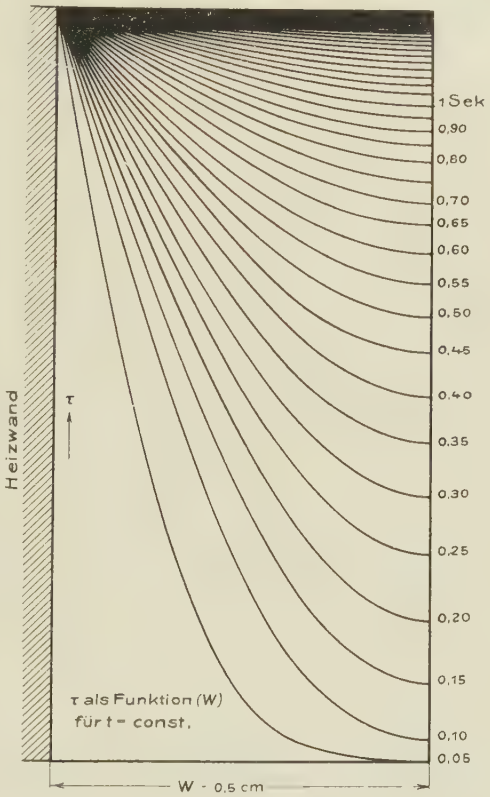


Fig. 12.

Erwärmung der Luft abhängig von der Zeit.

In der eben angegebenen Weise sind die Temperaturkurven in Fig. 12 konstruiert für $W = 0{,}5$ cm oder $2\,W = 1$ cm Abstand der beiden Heizwände; der Deutlichkeit wegen wurde die Zeichnung in 20facher Vergrößerung ausgeführt (W in der Zeichnung = 10 cm); das mitgezeichnete Spiegelbild ist fortgelassen.

Die Zeit, welche dem Interwall zwischen zwei Temperaturkurven entspricht, berechnet sich aus Gleichung 8a zu $\Delta t = \frac{cs}{8k} \cdot p^2$, da in der Zeichnung $\Delta\tau = f$ gemacht wird. Für Luft mit den Konstanten:

$$c = 0{,}24 \frac{\text{gr.cal.}}{\text{gr. }^0\text{C.}};\ s = 0{,}0011 \frac{\text{gr.}}{\text{cm}^3}\ (50\ ^0\text{C});$$

$$k = 0{,}000056 \frac{\text{gr.cal.}}{\text{cm sek. }^0\text{C.}};$$

wird

$$\Delta t = 0{,}58\ p^2;$$

bei $\Delta t = 0{,}05$ Sek. ergibt sich eine Sehnenprojektion $p = 0{,}292$ cm wirklich oder $p = 5{,}84$ cm im Maßstab der Zeichnung.

Die Kurvenschar von Fig. 12 gilt in erster Linie nur für $W = 0{,}5$ cm; man braucht aber nicht für andere Werte von W eine vollständig neue Schar von Temperaturkurven zu zeichnen, sondern gelangt zu einer allgemeinen Formulierung auf Grund der bereits auf Seite 22 ausgeführten Betrachtungen.

Hat man demnach eine richtige Schar von Temperaturkurven für $W = W_1$ gefunden, so genügt ein dieser Schaar ähnliches Bild mit $W = W_2$ ebenfalls der Differentialgleichung. Die Zeiten, welche zu ähnlich liegenden Temperaturkurven in beiden Bildern gehören, verhalten sich wie die Quadrate entsprechenden Abszissen also wie $W_2^2 : W_1^2$; es muß daher allgemein die Temperatur an einer beliebigen Stelle Funktion von $t : W^2$ sein, so daß unter Berücksichtigung von Gleichung 8a allgemein

$$\tau = F\left(\frac{x}{W}, \frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2}\right)$$

Die Funktion selbst ist durch Fig. 12 für $W = 0{,}05$ cm und die angegebenen Werte von c, s, k gegeben.

Die von der Heizwand auf die Luft übergeleitete Wärmemenge ist proportional der unter einer Temperaturkurve liegenden Fläche; es empfiehlt sich hieraus die mittlere Temperatur der Luftmasse zu berechnen, da diese bei der experimentellen Verfolgung der Vorgänge eine wichtige Rolle spielt.

Bezeichnet τ_m die mittlere Temperatur der Luftmasse, so kann

$$\tau_m - \tau_0 = \sigma \cdot (\tau_w - \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gesetzt werden, wobei die Verhältniszahl σ in den Grenzen 0—1 sich ändert und zugleich ein Maß dafür ist, wieviel von der maximal möglichen Wärmemenge bis zu einem bestimmten Zeitpunkt bereits eingetreten ist.

Der Faktor σ muß ebenfalls Funktion von $\frac{cs}{k} \cdot \frac{t}{W^2}$ sein, so daß allgemein

$$\sigma = \Phi\left(\frac{cs}{k} \cdot \frac{t}{W^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Werte der Funktion Φ sind aus den Temperaturkurven nach Fig. 12 zu ermitteln indem durch Planimetrieren die mittlere

Temperatur der Luftmasse abhängig von der Zeit bestimmt wird. Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2} = z$, so wird für

$z =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	1,5	∞
$\Phi(z) =$	0	0,35	0,50	0,61	0,70	0,82	0,90	0,94	0,98	1

Für $z < 0{,}30$ (entsprechend $\sigma < 0{,}6$) ist $\Phi(z) = 1{,}12\sqrt{z}$ in Übereinstimmung mit der bereits gemachten Bemerkung, daß für ge-

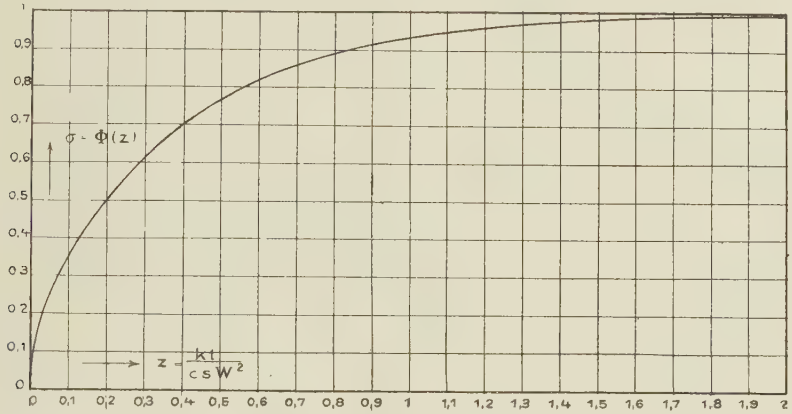


Fig. 13. Funktion $\Phi(z)$.

nügend kleine Zeiten die Wärme ebenso eindringt, wie wenn keine Grenzwand vorhanden wäre, also mit der Wurzel aus der Zeit.

Der Verlauf der Funktion $\Phi(z)$ ist graphisch in Fig. 13 dargestellt.

Für Luft mit den Konstanten:

$$k = 0{,}000056 \frac{\text{gr.cal.}}{\text{cm sek. } ^0\text{C}}; \quad c = 0{,}24 \frac{\text{gr.cal.}}{\text{gr. } ^0\text{C}}; \quad s = 0{,}0011 \frac{\text{gr.}}{\text{cm}^3};$$

ist

$$z = \frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2} = 0{,}214 \frac{t}{W^2},$$

so daß

$$\sigma = \Phi\left(0{,}214 \frac{t}{W^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

2. Wärmeübergang auf bewegte Luft.

Es soll zunächst der idealisierte Fall betrachtet werden:

Reibungsfreie und wirbelfreie Bewegung der Luft.

Dabei würden die Luftteilchen mit gleicher Geschwindigkeit parallel zur Heizfläche sich bewegen (s. Fig. 14), ohne daß in der Berührungsfläche von Heizwand und Luft eine Störung auftritt. Damit dies möglich sei, muß man sich die Heizfläche vollständig

glatt denken. Die Luft würde dann wie ein fester Körper an der Heizwand entlang gleiten.

Unter diesen Bedingungen kann es nichts mehr ausmachen, ob die Luft relativ zur Wand in Ruhe oder Bewegung ist. Die Wärme geht von der Heizwand auf die unmittelbare berührende Luftschicht über, ohne daß wegen der Bewegung dieser Schicht ein besonderer Übergangswiderstand auftritt; bei der weiteren Ausbreitung in der Luftmasse selbst ist es an sich gleichgültig, ob die Luft in Ruhe ist oder sich wirbelfrei bewegt.

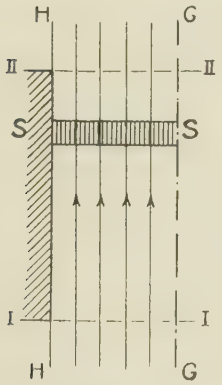


Fig. 14.

Faßt man eine durch zwei Ebenen senkrecht zur Heizwand begrenzte Schicht *SS* (s. Fig. 14) ins Auge, so beginnt deren Anwärmung bei der Berührung mit der Heizwand an der Stelle *I—I* und endigt an der Stelle *II—II*. Die Zeit, welche die Schicht mit der Wand in Berührung bleibt, wird passend die Berührungszeit genannt und ist $t = \frac{L}{v}$, wenn L die Länge der Heizwand und v die Geschwindigkeit der Kühlluft bezeichnet. Man kann jetzt die Temperaturverteilung und die eingedrungene Wärme nach den Formeln des Abschnittes: Wärmeübergang auf ruhende Luft berechnen.

Demnach ist die mittlere Temperaturzunahme der Kühlluft beim Verlassen der Heizfläche

$$\tau_m - \tau_0 = \sigma\,(\tau_w - \tau_0).$$

Der Faktor σ kann nach Gleichung 14a

$$\sigma = \Phi\left(0{,}214\,\frac{t}{W^2}\right)$$

mit Hilfe der Funktion $\Phi(z)$ (s. Seite 27) berechnet werden, wobei die Berührungszeit $t = \frac{L}{v}$ zu setzen ist; also

$$\sigma = \Phi\left(0{,}214\,\frac{L}{v\,W^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Werte von Funktion Φ ergeben sich aus Fig. 13 oder nach Seite 27.

Für die häufig vorkommenden Werte $\sigma < 0{,}60$ wird $\Phi(z) = 1{,}12\,\sqrt{z}$ und damit

$$\sigma = \frac{0{,}52}{W}\sqrt{\frac{L}{v}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

(W in cm; L in m; v in m/sek.).

Es ergibt sich also das praktisch wichtige Resultat, daß die mittlere Temperaturzunahme der Kühlluft und dementsprechend die abgeführte Wärme mit der Wurzel aus der Länge der Heizwand zunimmt. Man kann diese auch in der Weise erklären, daß die später bestrichenen Teile der Heizwand mit bereits angewärmter Luft in Berührung kommen und daher weniger wirksam sein können.

Für $\sigma > 0{,}60$ ergeben sich die Werte von $\Phi(x)$ für $x = 0{,}214 \frac{L}{v W^2}$ nach Fig. 13. In solchen Fällen steigt dann die abgeführte Wärme noch langsamer als die Wurzel aus der Länge der Heizwand.

Die abgeführte Wärme ergibt sich schließlich nach Gleichung 7 b

$$Q = 1{,}1\, V \sigma\, (\tau_w - \tau_0) \text{ Kilowatt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wobei V in cbm/sek. einzusetzen ist.

Außer der ebenen Heizfläche kommen in der Technik häufig Anordnungen vor, bei welchen durch eine Röhre Kühlluft geblasen wird. Es wäre daher noch die Temperaturverteilung für eine gekrümmte Heizfläche zu untersuchen. In diesem Falle hat aber die Differentialgleichung nicht mehr die einfache Form und auch die graphische Konstruktion mittels Sehnen ist nicht mehr ohne weiteres verwendbar. Man muß sich daher vorläufig mit einer Schätzung begnügen und kann auf Grund der im folgenden beschriebenen Versuche von Ser[17] näherungsweise $W = 0{,}6\, R_i$ setzen.

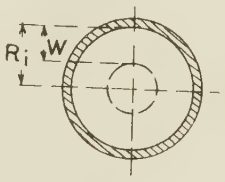


Fig. 15.

Versuche über den Wärmeübergang von Heizflächen auf bewegte Luft.

Entsprechend der praktischen Bedeutung dieser Frage in den verschiedensten Zweigen der Technik sind Messungen nach einer Reihe von Methoden ausgeführt.

Eine ausführliche Zusammenstellung derselben hat Mollier[15] (1897) gegeben.

Die ältesten und genauesten Versuche stammen von Joule[16] (1861) dem bekannten Experimentator auf wärmetechnischem Gebiet. Er benützte zu seinen Versuchen einen Apparat in der Seite 31 skizzierten Anordnung (s. Fig. 16).

Ein Kupferrohr war auf der einen Seite an einen Dampfkessel angeschlossen und auf der anderen Seite mit einem Kon-

Versuche von Joule.

Nr. des Versuches.	Druck im Kessel in kg cm².	Luftpressung in mm Wassersäule	Wasserwert der Kühlluft kg St.	Kondenswasser kg St.	Temperatur des kond. Wasser.	Totale Dampfwärme	Druck im Kondensator mm Hg	Kondensertemp. τ_2 nach Regnault.	Luft-temperaturen: Eintritt τ	Luft-temperaturen: Austritt τ_1	Temp.-Zunahme der Luft (σ —).	Berechnete Luft-Geschwind. m sek.	Beschreibung der Anordnung.
1	2,50	5850	3,0	0,50	95,3	582	0,88	96,0	13,8	94	0,98	86	W = Lichte Weite zwischen Dampfrohr u. Mantelrohr f = Querschnitt zwischen Dampfrohr u. Mantelrohr.
2	2,45	5100	2,55	0,34	93,6	665	0,72	90,6	13,8	90,5	1,00	72	
3	2,80	5800	2,85	0,39	71,0	661	1,04	100,6	19,0	99	0,98	80	Dampfrohr: Innendurchm. = 16 mm Äußerer Durchm. = 19 mm, Länge = 1,22 m. Mantelrohr: Innendurchm. = 20,3 mm. W = 0,065 cm; f = 0,39 cm².
4	2,13	805	3,0	0,39	71,7	596	0,77	92,5	13,2	81,6	0,86	32,5	Dampfrohr: wie oben.
5	2,49	800	3,05	0,46	85,0	568	0,93	97,4	14,4	86,3	0,87	33,2	Mantelrohr: Innendurchm. = 22 mm. W = 0,15 cm; f = 0,98 cm².
6	1,74	34,5	2,07	0,30	90,3	571	0,93	97,4	11,0	80,6	0,81	9,8	
7	1,48	89,0	3,76	0,43	90,4	653	0,95	98,0	12,5	76,8	0,75	17,8	Dampfrohr: wie oben.
8	1,42	89,0	3,76	0,40	84,0	658	0,87	95,5	13,9	73,7	0,74	17,8	Mantelrohr: Innendurchm. = 25,4 mm.
9	1,41	140	4,65	0,51	91,0	640	0,90	96,5	11,7	72,8	0,72	22	W = 0,32 cm; f = 2,2 cm².
10	1,58	140	4,65	0,51	92,0	643	0,90	96,4	11,4	72,9	0,72	22	
11	1,48	140	14,3	0,78	68,7	652	0,93	97,5	10,3	42,1	0,37	20,4	
12	1,80	140	14,6	0,94	98,0	634	1,02	100	8,8	43,4	0,38	20,8	Dampfrohr: wie oben.
13	1,66	140	14,6	0,94	98,0	634	1,06	100	9,5	44,2	0,38	20,8	Mantelrohr: Innendurchm. = 35,5 mm.
14	1,44	325	6,80	0,53	98,0	590	1,02	100	10,5	48,5	0,43	9,8	W = 0,82 cm; f = 7 cm².
15	1,67	330	5,90	0,46	97,2	601	1,02	100	10,9	49,9	0,44	8,4	
16	1,48	33,0	3,80	0,50	97,0	575	1,02	100	10,6	73.6	0.70	5,5	Die gleichen Röhren, jedoch um das Dampfrohr Spirale mit 30 Windungen Kupferdraht Durchm. = 2,5 mm halb links, halb rechts gewickelt.
17	1,44	135,0	8,40	0,87	100	605	1,02	100	14,9	67,3	0,62	12,2	
18	1,42	36,5	2,10	0,25	103	611	1,02	100	9,1	69,1	0,66	3,0	Beide Röhren wie oben, jedoch Länge = 0,61 m; Spirale mit 20 Windungen Kupferdraht Durchm. = 5,3 mm.
19	1,59	90	3,52	0,34	103	671	1,02	100	8,5	63,3	0,60	5,0	
20	1,53	36,5	2,53	0,23	97	609	1,02	100	6,4	52,9	0,50	3,6	Beide Röhren wie oben, jedoch Länge = 0,305 m; Spirale mit 10 Windungen Kupferdraht Durchm. = 5,3 mm.
21	1,54	90	4,15	0,29	99	657	1,02	100	8,2	46,7	0,42	5,9	

densator verbunden; konzentrisch zu dem Dampfrohr war als Mantel ein zweites Rohr angebracht. In den ringförmigen Raum zwischen beiden Röhren wurde Kühlluft getrieben und deren Temperatur am Eintritt (τ) und am Austritt (τ_1) gemessen.

Da bei umgekehrter Strömungsrichtung die Kühlluft den gleichen Temperaturzuwachs zeigte, folgerte Joule, daß die Tem-

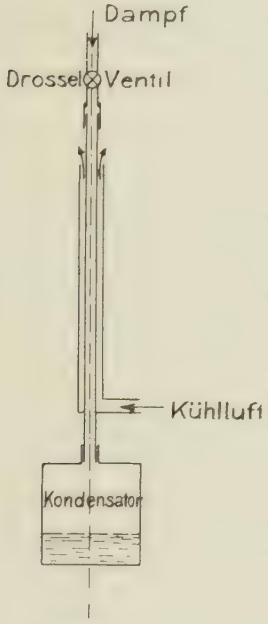


Fig. 16.

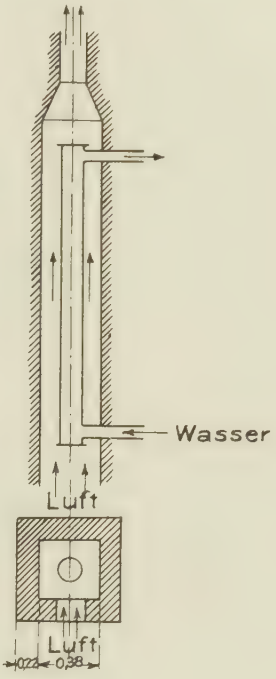


Fig. 17.

peratur des inneren Heizrohres an allen Stellen gleich sei. Da ferner der Temperaturabfall vom Dampf zum Kupferrohr verschwindend klein ist, wurde die Temperatur der Heizfläche gleich der Dampftemperatur gesetzt und aus dem Dampfdruck im Kondensator nach den Tabellen von Regnault berechnet.

Wegen ihrer Wichtigkeit sollen die Versuchsdaten (umgerechnet auf das metrische System) nach dem Original wiedergegeben werden. Der Tabelle (s. S. 30) wurden außerdem zwei Spalten noch beigefügt, welche die aus der Kühlluftmenge berechnete Luftgeschwindigkeit und den Faktor σ, d. i. der Temperaturzuwachs der Kühlluft bezogen auf die Übertemperatur des Heizrohres, enthalten.

Die Versuche von Joule scheinen nicht viel bekannt geworden zu sein. Denn Ser[17] (1888) berichtet über eine Reihe von Versuchen mit einer Anordnung, die der Jouleschen ziemlich ähnlich sieht. Ser verwendete ebenfalls zwei konzentrische Röhren; die Kühlluft durchströmte aber das innere Rohr, während die Heizung durch Dampf oder heißes Wasser im Mantel erfolgte. Von den Versuchen ist nur das Endergebnis veröffentlicht. Ser berechnete aus den Versuchsdaten die Wärmeübergangszahl α (s. Seite 10 u. s. Gl. 3 u. Gl. 3 a).

Der Verfasser hat aus den angegebenen Werten von α rückwärts die Temperaturzunahme der Kühlluft bestimmt (s. nachstehende Tabelle).

Außerdem führte Ser noch Versuche aus mit einem Apparat nach umstehender Skizze (Fig. 17).

Als Heizkörper diente ein Gußeisenrohr, in welchem warmes Wasser zirkulierte; das Rohr befand sich in einer gemauerten Kammer, deren untere Öffnung an einen Ventilator angeschlossen war. Gemessen wurden die Temperaturen von Luft und Wasser beim Eintritt und Austritt. Die Geschwindigkeit der Kühlluft

Versuche von Ser mit konzentrischen Röhren.

Beschreibung der Anordnung.	Geschw. der Kühlluft v m/sek.	Erwärmung der Kühlluft $\sigma =$			
		$D_i = 1$ cm	2 cm	3 cm	5 cm
Beide Röhren aus Kupfer; Rohrlänge bei allen Versuchen = 1 m; Innendurchmesser des inneren Rohres D_i = 1, 2, 3, 5 cm.	0,25	—	—	0,79	0,84
	0,50	—	0,77	0,80	0,72
	0,75	—	0,76	0,75	0,63
	1,0	0,77	0,75	0,72	0,61
	1,5	0,76	0,69	0,65	0,58
	2,0	0,76	0,65	0,62	—
	3,0	0,74	0,65	0,60	—
	4,0	0,70	0,65	0,58	—
	5,0	0,72	0,64	0,56	—
	6,0	0,78	0,62	0,54	—
	7,0	0,79	0,61	—	—
	8,0	0,81	0,61	—	—
	9,0	0,82	0,59	—	—
	10,0	0,82	—	—	—

Bemerkungen: Durch besondere Versuche wurde festgestellt, daß Dampftemperatur und Wandtemperatur gleichgesetzt werden können. Außerdem zeigte sich das Leitvermögen und damit die relative Erwärmung der Kühlluft unabhängig von den Absoluttemperaturen.

wurde aus ihrem Gewicht und dem freien Kanalquerschnitt berechnet. Zu der nach dem Original (Veröffentlichung) wiedergegebenen Tabelle hat der Verfasser noch eine Spalte über den Faktor σ beigefügt,

Bei weiteren Versuchen, die hier nicht aufgenommen sind, war das Gußeisenrohr mit Außenrippen versehen.

Versuche von Ser,
Gußeisenrohr in gemauerter Kammer.

Anordnung	Gew. der Luft kg/st.	Geschw. um das Rohr in m/sek.	Temperaturen ° C Wasser Eintritt	Wasser Austritt	Luft Eintritt	Luft Austritt	σ
Gußeisenrohr; $D_i =$	310	0,68	79	71	1	22,9	0,30
0,20 m	393	0,86	79,5	68,7	0,8	19,8	0,26
Wandstärke 8 mm.	444	0,93	79,8	71	0,8	18,4	0,24
Länge 2,6 m	654	1,40	79,5	72	0,9	15,8	0,20
Oberfläche = 1,76 m².	732	1,57	79,8	72,2	1,6	16,8	0,20
	804	1,71	79,0	71,2	0,5	14,7	0,19
	886	1,90	80	74,5	1,2	15,8	0,19
	958	2,04	80,2	73,0	1,0	15,2	0,19
	996	2,12	79,5	70	1,1	14,5	0,18
	1058	2,24	80,0	74,5	1,5	14,0	0,17
	1083	2,30	79,5	72,5	1,6	14,6	0,16
	1646	3,56	81,0	76,3	2,0	12,5	0,14
	1786	3,77	80	73,5	1,0	12,7	0,15
	1958	4,13	80	76,0	2,0	12,5	0,14
	1981	4,18	80	76,3	2,5	12,5	0,13
	2186	4,60	80,5	76,5	1,8	12,5	0,14

Bemerkungen: Bei diesen Versuchen ist zu berücksichtigen, daß auch durch Strahlung Wärmeübergang erfolgt; durch besondere Versuche wurde festgestellt, daß der Übergangskoeffizient ziemlich von der Absoluttemperatur abhängt.

Die bisher genannten Versuche sind, wie schon aus den Versuchsanordnungen zu ersehen ist, hauptsächlich für die Zwecke der Heiz- und Kühltechnik bestimmt. Daneben wurde eine Reihe von Versuchen speziell für die Bedürfnisse der Elektrotechnik ausgeführt.

So liegen (auf Anregung von Kapp) Versuche vor von Ott[18] (1906). Ein aus Dynamoblech mit Papierzwischenlagen aufgebauter Würfel von 9,5 cm Kantenlänge sitzt mit einer Stirnfläche auf einer Heizplatte, während die gegenüberliegende Seite in die Wand eines Kühlluftkanals eingefügt ist (s. Fig. 18). Gemessen

wurde mittels Thermoelementen das Temperaturgefälle in Richtung des Wärmestromes und aus dem durch besondere Versuche ermittelten Leitvermögen des Eisens die an die Luft übergetretene Wärmemenge berechnet. Dabei wurde angenommen, daß in allen parallelen Blechen gleiches Gefälle herrscht. Beobachtungen über die Temperaturzunahme der Luft liegen nicht vor. Die Luftgeschwindigkeit wurde mittelst Anemometer gemessen und in den Grenzen 0—30 m/sek. geändert. Da bei den Versuchen

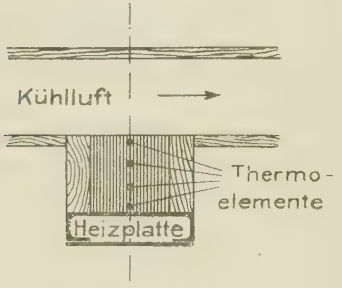


Fig. 18.

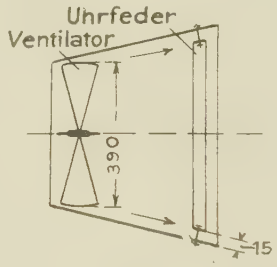


Fig. 19.

das Temperaturgefälle in Richtung der Bleche sehr klein war (etwa 1—0,08° C/cm), können größere Fehler im Resultat auftreten.

Es wurden drei Versuchsreihen ausgeführt, wobei die von der Luft bespülte Stirnfläche

1. ohne besondere Behandlung,
2. mit dünner Lackschicht,
3. mit dicker Lackschicht versehen war.

Die fortgeführte Wärmemenge war für die Versuchsfläche von $9{,}5 \times 9{,}5$ cm² mit graphischer Interpolation

bei Fall 1 und 2 $q = 0{,}20\ (1 + 0{,}25\ v)$ Watt/°C
„ „ 3 $q = 0{,}27\ (1 + 0{,}107\ v)$ Watt/°C.

(Es ist hier absichtlich nicht die pro Flächeneinheit treffende Wärmemenge angegeben, da nach früheren Darlegungen die Wärmemenge nicht proportional der Fläche umgerechnet werden darf.)*)

Ferner liegen noch Versuche vor von Schüppel[19] (1902). Die Versuchskörper (eine Uhrfeder, Runddrähte aus Eisen oder Kupfer) waren kreisförmig zusammengebogen und hingen an dünnen

*) Der zweite Referent, Herr Professor Knoblauch bemerkt zu diesem Satz Folgendes: Dieser Satz darf nicht als eine ablehnende Kritik der von Ott ausgeführten Berechnung der Wärmeübergangszahl aufgefaßt werden. Gemäß der Definition dieser Größe hat ihre Berechnung unter der ausdrücklichen Voraussetzung zu geschehen, daß zwischen Wärmemenge

Drähten in einem schwach konischem Rohr aus Pappe so, daß die Ebene der Drähte senkrecht auf der Rohrachse stand (s. Fig. 19). Die Heizung erfolgte elektrisch, wobei in einfacher Weise aus der Widerstandszunahme die Temperaturerhöhung berechnet werden konnte. Die Luftgeschwindigkeit wurde direkt hinter den Drähten (die Uhrfeder war öfters tordiert) mittels Anemometer bestimmt.

Versuche mit der Uhrfeder:

Länge 114 mm, Breite 2 mm,
Dicke des blanken Streifens: 0,154 mm,
„ „ berußten „ : 0,263 mm,
Oberfläche je ca. 500 mm².

Bei 20° C Übertemperatur wurden folgende Wärmemengen abgegeben:

Luftgeschwindigkeit	$v = 0$	0,7	2,2	m/sek.
Streifen blank	$q = 0{,}21$	1,0	2,2	Watt
„ berußt	$q = 0{,}37$	1,58	3,5	Watt.

Versuche mit Runddrähten.

Dimensionen nicht angegeben; nimmt man bei $v = 0$ gleiche Abgabefähigkeit wie bei der Uhrfeder an, so berechnet sich aus dem Widerstand: Länge = 0,65 m, Durchm. = 1 mm. Bei 30° C Übertemperatur betrug die von der ganzen Oberfläche abgegebene Wärme:

Luftgeschwindigkeit	$v = 0$	0,5	1	2	3	m/sek.
blanker Eisendraht	$q = 1{,}2$	6,4	9	12	14	Watt
blanker Kupferdraht	$q = 0{,}90$	5,0	7,3	10,5	12,4	Watt

Nach Abschluß der Arbeit erschienen:

In einem Referat großen Stils (es wurden über 500 Bücher und Schriften einer genauen Durchsicht unterzogen) berichtet Dalby[27] (Oktober 1909) über die gesamte Literatur betreffend Wärmeübergang auf Flüssigkeiten und Gase für den Zeitraum 1690—1909. Wesentlich Neues gegenüber den bereits hier angegebenen Arbeiten ist dabei nicht gefunden worden.

Versuche ähnlich denen von Ser (s. Seite 33) wurden in neuester Zeit (veröffentlicht Okt. 1909) ausgeführt von Nusselt[26].

---

und Fläche Proportionalität besteht. Die Wärmeübergangszahl liefert dann die Wärmeabgabe der Flächeneinheit selbstverständlich nur für einen gedachten, von der Wirklichkeit mehr oder minder abweichenden Fall.

Der Verfasser mußte daher bei der zahlenmäßigen Verwertung der Ottschen Resultate auf die durch die Untersuchung unmittelbar gegebenen Beobachtungszahlen zurückgehen. Osc. Knoblauch.

Durch das innere Rohr (Länge ca. 1,8 m, lichter Durchm. = 22 mm) strömte Luft von verschiedener Pressung, Kohlensäure, Leuchtgas. Die Versuche bilden daher eine wertvolle Ergänzung zu den bisher ausgeführten Messungen.

Einfluß der Wirbelung.

Berechnet man für die beschriebenen Versuche diejenige Wärmemenge, welche bei wirbelfreier Bewegung der Kühlluft von dieser aufgenommen werden müßte, so zeigt sich, daß die bei den Versuchen gemessene Wärmemenge fast in allen Fällen größer ist als die berechnete und oft ein Mehrfaches derselben beträgt. Die vermehrte Wärmeabgabe wird durch die Wirbelung der Kühlluft bewirkt. Nach den grundlegenden Untersuchungen von Osborne Reynolds[20] (1883) beschreiben, wie bereits bemerkt, nur bei kleinen Geschwindigkeiten die einzelnen Teilchen einer Flüssigkeit parallele Bahnen (Stromfäden), während von einer bestimmten Geschwindigkeit ab, welche als die kritische Geschwindigkeit bezeichnet wird, diese geordnete Bewegungsform nicht mehr stabil ist und eine lebhafte Durcheinanderwirbelung der Teilchen eintritt. Man bezeichnet eine derartige Strömungsform als turbulente Bewegung. Dabei gelangen wärmebeladene Teilchen zwischen kältere und tritt ein beschleunigter Temperaturausgleich ein; es ist dies auch von manchen Beobachtungen des täglichen Lebens her bekannt, z. B. Umrühren einer Flüssigkeit.

Es fehlt nicht an Ansätzen zu einer analytischen Verfolgung der Vorgänge bei der turbulenten Bewegung. So geht z. B. Boussinesq[21] (1877) bei seinen Untersuchungen über strömende Flüssigkeiten von der Annahme aus, daß in einem festen Punkt im Strömungsgebiet erstens eine Grundgeschwindigkeit unabhängig von der Zeit herrsche, zweitens eine beliebig wechselnde Geschwindigkeit vorhanden sei, deren Komponenten so von der Zeit abhängen, daß ihre mittleren Werte über eine gewisse kurze Zeit genommen verschwinden. Diese theoretischen Untersuchungen sind aber noch nicht genügend entwickelt, um Grundlagen für eine den praktischen Anforderungen genügende Berechnung geben zu können.

Im folgenden ist von einer anderen Seite aus, auf empirischem Wege, versucht wenigstens eine näherungsweise Lösung zu erreichen.

Die Wirbelung beschleunigt erfahrungsgemäß den Temperaturausgleich, wirkt also ähnlich wie eine Vergrößerung des inneren Leitvermögens der Luftmasse. Man kann daher versuchen, die

tatsächlichen Vorgänge auf die bereits betrachteten zurückzuführen, indem man annimmt, daß die Bewegung wirbelfrei vor sich gehe, daß aber das innere Leitvermögen um einen der Wirbelung äquivalenten Betrag vergrößert sei. Es soll dieses scheinbare oder ideelle Leitvermögen

$$k_i = i \cdot k$$

gesetzt werden, wobei der Vergrößerungsfaktor i aus Versuchen zu berechnen ist.

In den Tabellen Seite 38 u. 39 sind für die angegebenen Versuche die zur Bestimmung von i erforderlichen Daten zusammengestellt.

Dabei ist zu bemerken, daß aus den Versuchen von Joule Werte für die Nähe des Versuchsbereichs interpoliert wurden. Bei den Versuchen von Ser (12—23) ist $W = 0{,}6\ R_i$ des inneren Rohres gesetzt, da sich dann die geringsten Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch ergeben. Bei den zweiten Versuchen von Ser, Gußeisenrohr in gemauerter Kammer (Nr. 24—27), gibt der Heizkörper auch durch Strahlung Wärme ab; diese wird von den Kammerwänden aufgenommen und da vermutlich nur ein geringer Betrag davon durch die Mauern nach außen dringt, geht der größere Teil von den warmen Wänden an die Kühlluft über. Bei den kleineren Luftgeschwindigkeiten ist dieser Betrag von gleicher Größenordnung wie die vom Heizrohr übergeleitete Wärmemenge. Um die Strahlung einigermaßen zu berücksichtigen, wurde hierfür ein Abzug von $e = 5\,\frac{\text{Watt}}{\text{qm}\ ^0\text{C}}$ für die Rohroberfläche berechnet. Der Abstand von Heizwand und Grenzwand ist nur näherungsweise zu bestimmen. Ebenso sind bei den Versuchen von Schüppel (Nr. 32—36) die angegebenen Werte von L und W als erste Annäherung aufzufassen.

Die Berechnung von i erfolgte bei den Versuchen von Joule und Ser (Nr. 1—23) in der Weise, daß zu dem gemessenen σ der Wert von z aus $\Phi(z)$ nach Fig. 13 bestimmt und

$$A = \frac{i\,k\,t}{c\,s\,W^2} = 0{,}214\,\frac{i\,t}{W^2}$$

(s. Seite 27) gesetzt wurde. Bei den Versuchen von Ott und Schüppel rechnet man besser mit der äquivalenten Schichtdicke; bezeichnet δ die äquivalente Schichtdicke für wirbelfreie Bewegung berechnet, und δ_w die nach dem Versuch tatsächlich vorhandene, so muß nach Gleichung 12

Nr.	v m/sek.	L m	t sek.	W cm	σ	$\varkappa$	i	Bemerkungen
1	80	1,22	0,0152	0,065	0,98	1,45	1,9	Joule:
2	20	„	0,061	0,15	0,90	0,83	1,4	2 konzentrische
3	30	„	0,041	„	0,88	0,75	1,9	Röhren, Innenhei-
4	40	„	0,031	„	0,85	0,66	2,3	zung.
5	10	„	0,12	0,32	0,80	0,56	2,2	Näherungsweise:
6	20	„	0,061	„	0,73	0,44	3,4	$i = 1 + 0{,}3\ Wv$.
7	30	„	0,041	„	0,69	0,39	4,5	
8	5	„	0,24	0,82	0,50	0,20	2,6	
9	10	„	0,12	„	0,43	0,15	3,9	
10	20	„	0,061	„	0,38	0,115	5,9	
11	30	„	0,041	„	0,35	0,10	7,6	
12	2	1	0,50	0,30	0,76	0,49	0,40	Ser:
13	5	„	0,20	„	0,72	0,43	0,90	2 konzentrische
14	10	„	0,10	„	0,82	0,60	2,5	Röhren, Mantel-
15	1	„	1,00	0,60	0,75	0,47	0,8	heizung, $W = 0{,}6\ R_i$
16	4	„	0,25	„	0,65	0,34	2,3	gesetzt.
17	8	„	0,125	„	0,61	0,30	4,0	Näherungsweise:
18	0,5	„	2,00	0,90	0,80	0,56	1,1	$i = 1 + 0{,}7\ Wv$.
19	2	„	0,50	„	0,62	0,31	2,3	
20	6	„	0,166	0,90	0,54	0,23	5,0	
21	0,25	„	4,00	1,50	0,84	0,64	1.7	
22	0,75	„	1,34	„	0,63	0,32	2,6	
23	1,5	„	0,67	„	0.58	0,27	4,4	
24	1	2,6	2,6	10	0,17	0,023	4,2	Ser: Gußeisen-
25	2	„	1,3	„	0,15	0,018	6,5	rohr in gemauerter
26	3	„	0,87	„	0,14	0,016	8,5	Kammer, Strahlung
27	4	„	0,65	„	0,13	0,014	10	berücksichtigt.
								$i = \sim 1 + 2{,}5\ v$.

Nr.	v m/sek.	L m	t sek.	W cm	δ cm	δ_w cm	i	Bemerkungen
28	5	0,095	0,019	9,5	0,072	0,082	1,30	Ott: Würfel aus
29	10	„	0,0095	„	0,050	0,064	1,65	Dynamoblech,
30	20	„	0,0047	„	0,035	0,055	2,50	ohne Lack.
31	30	„	0,0032	„	0,030	0,052	3,10	$i = \sim 1 + 0{,}07\ v$.
32	0,7	0,0015	0,0021	1,5—12	0,024	0,028	1,35	Schüppel:
33	2.2	„	0,0007	„	0.014	0.020	2,05	Blanke Uhrfeder.
								$i = \sim 1 + 0{,}5\ v$.
34	1	„	0,0012	„	0,018	0,021	1,3	Schüppel:
35	2	„	0,0006	„	0,013	0,014	1,2	Blanker Eisen-
36	3	„	0,0004	„	0,010	0,011	1,2	draht.
								$i = \sim 1{,}2$ const.

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{cs} \cdot t}$$

und der Vergrößerungsfaktor

$$i = \left(\frac{\delta_w}{\delta}\right)^2 \text{ sein.}$$

Ein Vergleich der so berechneten Werte von i zeigt, daß bei kleinen Luftgeschwindigkeiten i dem Werte 1 sich nähert, also $k_i = k$ wird, ein Zeichen dafür, daß die Luftbewegung ziemlich wirbelfrei ist. Mit steigender Geschwindigkeit wächst i und damit k_i; es ist auch zu erwarten, daß die Intensität der Wirbelung und damit das scheinbare innere Leitvermögen der Luft mit der Geschwindigkeit steigt. Nach den Versuchen kann ziemlich einheitlich $i = 1 + C_1 v$ gesetzt werden, so daß Widersprüche, wie man sie z. B. zwischen den Versuchen von Joule und Ser und andererseits denen von Ott zu finden glaubte, bei der hier durchgeführten Auswertung nicht mehr auftreten. Nur die Versuche mit blankem Eisendraht Nr. 34—36 bilden eine Ausnahme und sollen ausgeschieden werden, da bei dem sehr kurzen Berührungsweg doch besondere Verhältnisse auftreten könnten.

Außerdem zeigt sich, daß i stark vom Abstand W der Grenzwand abhängt und zwar so, daß angenähert $i = 1 + \omega W v$ ist, wobei ω eine Konstante bezeichnet. Es kann dies nur bis zu einer gewissen Grenze gültig sein, da sonst für den gerade praktisch sehr wichtigen Fall, daß keine Grenzwand vorhanden ist, also $W = \infty$ auch $i = \infty$ werden müßte. Dieser Formulierung fügen sich am besten die Versuche von Joule (1—11), während bei den Versuchen von Ser (12—23) die Übereinstimmung weniger gut ist, so daß noch weitere Versuche in dieser Richtung erforderlich sind.

Die Konstante ω soll charakteristisch sein für die Art der Wirbelung und hängt vermutlich von der Beschaffenheit der Oberfläche der Heizwand sowie davon ab, in welchem Grade die Luft bereits vor der Berührung mit der Heizwand durch äußere Ursachen in Wirbelung versetzt ist. Es machen sich diese Einflüsse bemerkbar, wenn man von einer Versuchsanordnung zu einer anderen übergeht. So ergeben die Versuche von Joule (Nr. 1—11) und Ser (Nr. 24—27) ungefähr die gleiche Konstante ω, während der nach den Versuchen von Ser (Nr. 12—23) berechnete Wert über doppelt so groß und der Wert aus den Versuchen von Ott (Nr. 28—31) ganz bedeutend kleiner ist.

Wenn daher auch noch manche Punkte zu klären sind, so ist doch der Versuch, die Wärmeausbreitung bei turbulenter Luftbewegung durch Annahme eines vergrößerten inneren Leitvermögens k_i zu berechnen, als gelungen zu betrachten, insofern als damit für eine Reihe von Anordnungen der Einfluß der Wirbelung zahlenmäßig berücksichtigt werden kann.

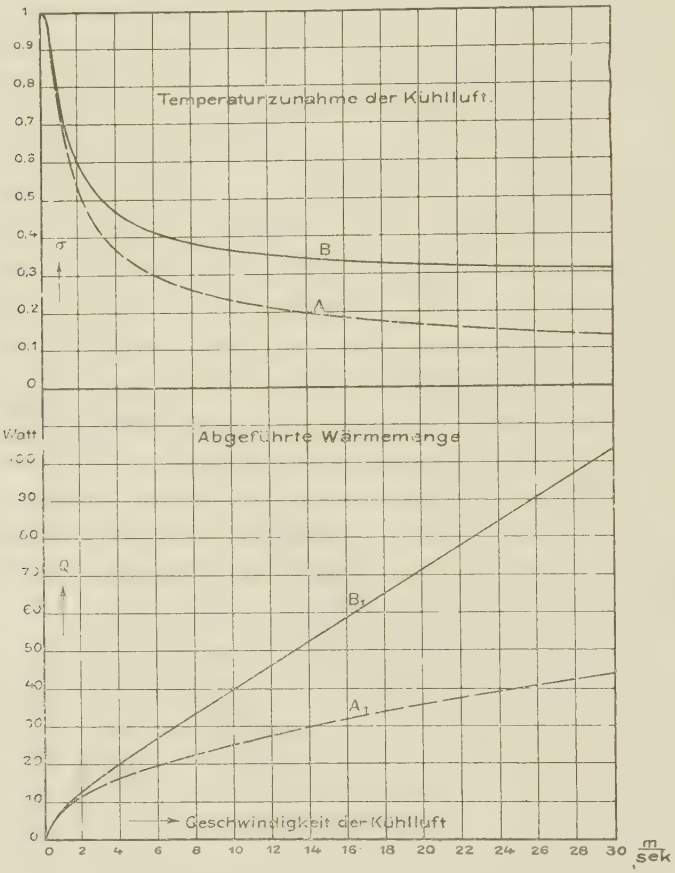


Fig. 20. Kurve A und A_1: Wirbelfreie Bewegung.
Kurve B und B_1: Turbulente Bewegung.

Man kann also jetzt auch bei wirbelnder Kühlluft die abgeführte Wärmemenge berechnen, indem man in die Gl. 12 und 14 für k die Werte des ideellen inneren Leitvermögens k_i einsetzt und erhält so:

Äquivalente Schichtdicke $\delta = 0{,}52\sqrt{it}$ cm . . . . . (12c)

und Anwärmungsfaktor $\sigma = \Phi\left(0{,}214\,\frac{it}{W^2}\right)$ . . . . (14c)

Um zu zeigen, wie die übergeleitete Wärmemenge mit der Geschwindigkeit der Kühlluft zunimmt, soll folgender Fall zahlenmäßig untersucht werden: Zwischen zwei parallelen Heizwänden von $L = 0{,}5$ m Länge in der Strömungsrichtung der Kühlluft, $B = 1$ m Breite senkrecht dazu und $2 \cdot W = 1$ cm Abstand strömt Kühlluft mit Geschwindigkeit 0—30 m/sek. Temperaturdifferenz zwischen Heizfläche und Kühlluft am Eintritt $= 1^0$ C.

Die Temperaturzunahme der Kühlluft bis zum Austritt ergibt sich nach Gl. 14c

$$\sigma = \Phi \left[0{,}214 \frac{i\,t}{W^2} \right],$$

wobei nach den Versuchen von Joule $i = 1 + 0{,}3\,W v$ zu setzen ist. In Fig. 20 sind sowohl die Werte von σ als auch die von der Kühlluft fortgeführte Wärmemenge Q berechnet nach Gl. 16

$$Q = 1{,}1\,V\sigma\,(\tau_w - \tau_0) \text{ in KW.}$$

abhängig von der Kühlluftgeschwindigkeit aufgetragen; zum Vergleich sind auch noch die entsprechenden Werte für wirbelfreie Bewegung der Kühlluft angegeben. Man sieht hieraus den bedeutenden Einfluß der Wirbelung, da mit steigender Geschwindigkeit die Austrittstemperatur der Kühlluft nur sehr langsam abnimmt.

Es ergibt sich damit auch die Lösung der viel umstrittenen Frage: Wie steigt die abgeführte Wärme mit der Kühlluftgeschwindigkeit? Bereits von ca. 2 m/sek. Luftgeschwindigkeit an kann die Kurve in Fig. 20 in sehr guter Annäherung durch eine Gerade ersetzt werden, die aber, was ausdrücklich bemerkt sei, nicht durch den Nullpunkt geht; man kann also für $v > 2$ m/sek. näherungsweise setzen:

$$Q = K_1 + K_2\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\text{a})$$

In diesem Bereich ist aber auch $\sigma = \Phi(z) = 1{,}12\sqrt{z}$, so daß mit $z = 0{,}214\,\frac{i\,t}{W^2}$, $t = \frac{L}{v}$ und $i = 1 + 0{,}3\,W v$ nach Gl. 16 der genaue Verlauf der Kurve dargestellt wird durch:

$$Q = 8{,}06\,\sqrt{(l + 0{,}15\,v)\,v} \text{ Watt/sek.}$$

Dies gilt sinngemäß auch für andere Dimensionen des Heizapparates, nur daß dann die Gültigkeitsgrenze verschoben wird. Man kann daher allgemein für nicht zu kleine Geschwindigkeiten setzen:

$$Q = C_1\,\sqrt{L\,(1 + C_2\,v)\,v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\text{b})$$

Die fortgeführte Wärme steigt daher bei relativ kleinen Geschwindigkeiten proportional $\sqrt{v}$ und dabei relativ großen Geschwindigkeiten wegen der Wirbelung fast linear mit v.

Bei ganz kleinen Geschwindigkeiten kann sich die Luft bis zur Wandtemperatur erwärmen, so daß die abgeführte Wärmemenge proportional v zunimmt; die Kurve in Fig. 20 geht daher vom Nullpunkt in der Form $Q = \text{const.}\, v$ aus.

Schließlich ergibt sich noch aus Gl. 17b, daß die fortgeführte Wärmemenge proportional $\sqrt{L}$ ist, also langsamer als die Länge der Heizfläche in der Strömungsrichtung steigt.

3. Natürliche Konvektion.

Vorgänge ähnlich den im vorigen Abschnitt behandelten treten auch auf, wenn eine an sich ruhige Luftmasse eine Heizwand berührt. Wie bereits bemerkt (s. Seite 19), dringt zunächst durch reine Leitung Wärme in die der Wand nächsten Schichten ein; die erwärmten Teilchen werden leichter und steigen durch Auftrieb in die Höhe. Da zum Ersatz kältere Teilchen nachströmen müssen, bildet sich schließlich in der Luftmasse ein stationärer Strömungszustand aus. Die dabei fortgeführte Wärmemenge kann beträchtlich sein, so daß tatsächlich eine scheinbar ruhende Luftmasse der Wärmeausbreitung keinen so großen Widerstand entgegensetzt, als ihrem geringen inneren Leitvermögen entspricht.

Allgemeine Untersuchungen über Vorgänge dieser Art liegen vor von Oberbeck[22] (1879): Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. Die endgültige Lösung gelang nur für den Fall, daß die Luft sehr verdünnt ist.

Lorenz[23] (1881) nahm die Berechnung wieder auf für das spezielle Problem: Eine vertikale Heizwand steht mit Luft von annähernd Atmosphärendruck in Berührung. Die Rechnung geht von den vereinfachenden Annahmen aus, daß die Geschwindigkeit eines Teilchens unabhängig von der Höhenlage, jedoch Funktion des Abstandes von der Heizwand sei und zwar so, daß für $x = 0$ und $x = \infty$ die Geschwindigkeit $= 0$ sein soll. Es ergibt sich schließlich für die pro Flächen- und Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge der Wert:

$$q = 0{,}000096\, H^{-1/4} \tau^{5/4} \cdot \frac{\text{gr. cal.}}{{}^0\text{C cm}^2 \text{ sek.}} = 1{,}3\, H^{-1/4} \tau^{5/4} \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\, {}^0\text{C}}$$

H = vertikale Höhe der Heizwand, $\tau = \tau_w - \tau_0$ = Übertemperatur der Heizwand.

Von einer Wiedergabe der etwas komplizierten Ableitungen soll hier abgesehen werden.

Weitere theoretische Arbeiten sind nicht bekannt geworden, so daß die exakte Berechnung der bei der Konvektion sich abspielenden Vorgänge zurzeit noch wenig entwickelt ist. Es soll daher im folgenden eine für praktische Bedürfnisse genügende Näherungslösung des Problems durchgeführt werden auf Grund der bisher entwickelten Anschauungen über die Wärmeausbreitung in ruhender oder bewegter Luft.

Näherungsweise Berechnung der Konvektion.

Wie bereits bemerkt (s. Seite 20), kann auch bei der natürlichen Konvektion die abgeführte Wärmemenge nach der allgemeinen Gleichung (7, 7a, 7b)

$$Q = 1{,}1\ V\ (\tau_{II} - \tau_I)\ \text{Kilowatt}$$

berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß die sekundlich durch einen Querschnitt (s. Fig. 3) strömende Luftmenge V nicht wie bei der künstlichen Kühlung gegeben, sondern erst zu berechnen ist. Sie hängt vom Auftrieb und damit wieder von der Temperaturverteilung ab. Die Aufgabe ist daher in der Weise zu lösen, daß erst die Temperaturverteilung in der Luft und die Abluftemperatur berechnet wird und dann der daraus resultierende Auftrieb und die Luftgeschwindigkeit bestimmt wird.

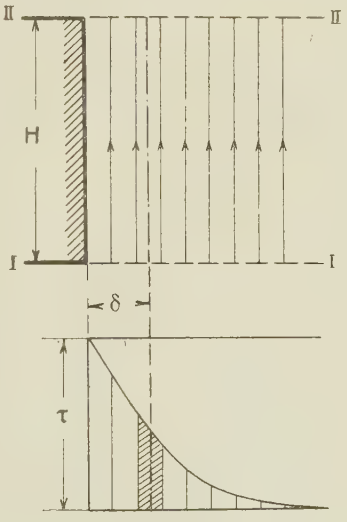


Fig. 21.

Der einfachste Fall ist der bereits von Lorenz behandelte: Vertikale ebene Heizfläche.

Es sei zunächst die Luft als ruhend angenommen und die Temperatur an allen Stellen gleich. Wird die Heizwand jetzt plötzlich auf eine höhere Temperatur gebracht, so dringt Wärme in die Luftmasse ein in der bereits im ersten Abschnitt beschriebenen Weise, so daß nach einer bestimmten Zeit die Temperaturverteilung:

$$\tau - \tau_0 = (\tau_w - \tau_0)\ [1 - \Theta\ (C x)]$$

vorhanden wäre (s. Fig. 21).

Die erwärmte Luft hat ein geringeres spez. Gewicht als die Luft der Umgebung und erleidet daher Auftrieb.

Zerlegt man die Luftmasse in Schichten parallel zur Heizwand, so hat jede Schicht eine andere Temperatur und damit verschiedenen Auftrieb. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in die Höhe steigt, müßte daher an der Wand am größten sein und mit zunehmender Entfernung davon immer kleiner werden. In Wirklichkeit bleiben die an die Wand grenzenden Schichten wegen der Reibung zurück. Aus beiden Gründen steigt daher die Luft nicht gleichmäßig in die Höhe, sondern die einzelnen Schichten verschieben sich parallel zueinander. Es ist dann nicht mehr ohne weiteres zulässig, den Temperaturverlauf wie oben anzunehmen; da aber das Vordringen der Wärme hauptsächlich vom Widerstand in Richtung des Wärmeflusses, also senkrecht zur Wand, abhängt, kann die Parallelverschiebung keinen großen Einfluß auf die Temperaturverteilung haben.

Wenn man daher die einfachen Annahmen macht, daß bei bewegter Luft die Temperaturverteilung die gleiche sei wie bei stagnierender Luft und daß ferner die Luft mit einer gewissen mittleren Geschwindigkeit sich aufwärts bewege*), so ist das Problem auf den bereits im zweiten Abschnitt behandelten Fall zurückführt, daß an einer Heizwand Luft gleichmäßig vorüberstreicht. Es besteht dann noch die Aufgabe, diese Geschwindigkeit zu berechnen.

Die Luft tritt durch die untere Horizontalebene mit der Temperatur der Umgebung ein; die unmittelbar mit der Heizwand in Berührung gelangenden Teilchen nehmen schnell die Temperatur derselben an, während die weiter abliegenden Teilchen sich erst allmählich erwärmen. Der Anwärmeprozeß ist nach dem Durchgang durch die obere Horizontalebene beendigt, die erwärmte Luft steigt aber noch ein beträchtliches Stück in die Höhe, bis sie sich auf Umgebungstemperatur wieder abgekühlt hat. Aus diesem Grunde ist es schwierig, die für den Auftrieb maßgebende Höhe der warmen Luftsäule zu bestimmen. Am nächsten liegt es, die Höhe der warmen Luftsäule proportional H also $= C_1 H$ zu setzen; es entspricht dies der Annahme, daß das Strömungsbild bei verschiedener Höhe der Heizwand ähnlich sei.

*) Trotzdem diese Annahmen nur als grobe Annäherung an die Wirklichkeit zu betrachten sind, decken sich die damit gefundenen Resultate ganz gut mit den Versuchen (vgl. S. 50 u. f.).

Die angenommene Temperaturverteilung senkrecht zur Wand:

$$(\tau - \tau_0) = (\tau_w - \tau_0) \cdot [1 - \Theta(Cx)]$$

bleibt ähnlich, sowohl wenn die Wandtemperatur sich ändert, als auch wenn die Berührungszeit bei verschiedener Auftriebsgeschwindigkeit eine andere wird. Denkt man sich nun die bereits erwähnte mittlere Geschwindigkeit der einzelnen Schichten hervorgebracht durch eine gewisse mittlere Temperatur der Luftmasse, so ist diese proportional der Wandtemperatur, also $= C_2 (\tau_w - \tau_0)$ zu setzen.

Bezeichnet s_1 das spez. Gewicht der umgebenden Luft, s_2 das spez. Gewicht entsprechend der mittleren Temperatur der warmen Luftsäule, so ist die dem Auftrieb gleichwertige Höhe der warmen Luftsäule

$$h = \frac{C_1 H s_1 - C_1 H s_2}{s_2} = C_1 H \left(\frac{s_1}{s_2} - 1\right).$$

Da ferner $s_1 : s_2 = T_2 : T_1$ (T_1 und T_2 absolute Temperaturen) wird

$$h = C_1 H \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = C_1 C_2 H \left(\frac{\tau_w - \tau_0}{T_1}\right).$$

Diese Druckhöhe wird verwendet, um der Luft Geschwindigkeit zu erteilen und die dabei auftretenden Reibungswiderstände zu überwinden. Nach den Lehren der Aerodynamik ist

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g} \qquad (\zeta = \text{Reibungskonstante}),$$

also

$$v = C_3 \sqrt{h} = C_4 \sqrt{\frac{H\tau}{T_1}},$$

wenn man alle Konstanten zusammenzieht und $\tau_w - \tau_0 = \tau$ zur Vereinfachung setzt.

Daraus ergibt sich die Berührungszeit (s. Seite 28)

$$t = \frac{H}{v}$$

und die äquivalente Schichtdicke (s. Seite 23 u. Fig. 21)

$$\delta = 0{,}52 \sqrt{t} = 0{,}52 \sqrt{\frac{H}{v}}.$$

Es ist also beim Erreichen des Querschnitts $II—II$ soviel Wärme in die Luft eingedrungen, daß damit die Luft bis zur Tiefe δ auf die Temperatur τ_w der Heizwand gebracht werden könnte.

Bedeutet B die Breite der Heizwand und $\tau_w - \tau_0 = \tau$ die Übertemperatur, so wird

$$Q = 1{,}1\, B \delta v \tau$$

und nach Elimination von δ und v

$$Q = \text{const.}\, B H^{3/4} T^{-1/4} \tau^{5/4}.$$

Das gleiche Resultat wurde bereits von Lorenz auf anderem Wege gefunden (s. Seite 42).

Die abgegebene Wärmemenge steigt also nicht ganz proportional der Höhe, dagegen rascher (mit der 1,25 Potenz) als die Temperaturdifferenz der Heizwand gegen die Umgebung.

Wieviel von jedem Oberflächenelement hierzu beigetragen wird, läßt sich am einfachsten aus der Änderung der äquivalenten Schichtdicke δ ersehen. Nach Obigem ist $\delta = 0{,}52 \sqrt[4]{\frac{H}{\tau}}$ oder, da für diese Betrachtung τ als konstant anzusehen ist, auch $\delta = \text{const.} \sqrt[4]{H}$. Die Zunahme von δ bezw. der eingedrungenen Wärme beim Fortschreiten um ΔH ergibt sich durch Differentiation:

$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{dH} \cdot \Delta H = \text{const.} \frac{\Delta H}{\sqrt[4]{H^3}}, \qquad \text{somit auch}$$

$$\Delta Q = \text{const.}\, \Delta\delta = \text{const.} \frac{\Delta H}{\sqrt[4]{H}}.$$

Die von einem Flächenelement abgegebene Wärme ist demnach mit $\frac{1}{\sqrt[4]{H}}$, also in weiten Grenzen veränderlich.

Die unten gelegenen Flächenelemente geben bedeutend mehr Wärme ab, als die oben gelegenen Elemente. Es ist daher die für den Wärmeübergang zugrunde gelegte Gleichung 3 (s. S. 10) $\Delta Q = \Delta F \alpha (\tau_w - \tau_0)$ nicht einmal näherungsweise erfüllt.

Berechnet man dagegen den Wert $\frac{Q}{F}$, d. h. den arithmetischen Mittelwert der pro Flächeneinheit abgegebenen Wärme, so ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\underline{q_m = \text{const.} \frac{\tau^{5/4}}{\sqrt[4]{H T_1}},}$$

also ein Wert, der sich verhältnismäßig wenig mit der Höhe H ändert. Man kann also immerhin, wie es praktisch fast ausnahmslos geschieht,

$$\underline{Q = F \alpha_m \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

setzen, wenn unter α_m eine mittlere Wärmeübergangszahl verstanden wird. Nach obigem ergibt sich

$$\underline{\alpha_m = \text{const.} \sqrt[4]{\frac{\tau}{H T_1}},}$$

hängt also von der Heizflächenhöhe H, der Umgebungstemperatur T_1 und der Temperaturdifferenz $(\tau_w - \tau_0) = \tau$ selbst wieder ab.

Während bei vertikaler Heizwand sowohl für die Vorstellung als auch wenigstens für die Näherungsrechnung keine besonderen Schwierigkeiten auftreten, liegen die Verhältnisse bei einer horizontalen Heizwand nicht mehr so einfach.

Denkt man sich zunächst wieder die Luftmasse in Ruhe, so dringt die Wärme nach dem Gesetz $\tau - \tau_0 = (\tau_w - \tau_0)\ [1 - \Theta(Cx)]$ senkrecht zur Heizebene vor, aber nur unter der Voraussetzung, daß die Heizfläche nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt ist. Bei der in Wirklichkeit immer vorhandenen endlichen Flächengröße ist jedoch die Randwirkung nicht mehr zu vernachlässigen. Die Wärme dringt nur in den mittleren Partien senkrecht zur Heizfläche vor, während in dem Maße, als man sich dem Rande nähert, auch Ausbreitung in horizontaler Richtung möglich ist. Die Flächen gleicher Temperatur sind dann nicht mehr Ebenen parallel zur Heizfläche, sondern ähnlich wie in Fig. 22a gekrümmt.

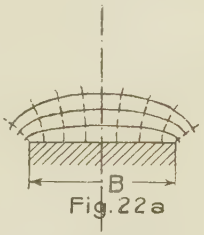


Fig. 22a

Die über der mittleren Partie stehende Luftsäule hat den größten Auftrieb; es wird daher die warme Luft in der Mitte in die Höhe steigen und zum Ersatz kalte Luft von den Seiten heranströmen, bis sich schließlich der in Fig. 22b angedeutete Strömungszustand stationär einstellt. Der Vorgang ist also im Prinzip dem bei der vertikalen Heizwand durchaus ähnlich. Die kalte Luft tritt von der Seite an die Heizwand heran, nimmt durch Leitung bei Berührung der Heizfläche Wärme auf und steigt durch Auftrieb in die Höhe. Wegen der Reibung vermindert sich die einmal erreichte Höchstgeschwindigkeit allmählich wieder, kann jedoch theoretisch erst in unendlicher Höhe gleich Null werden.

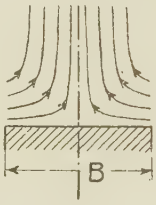


Fig. 22b.

In ähnlicher Weise muß auch die Übertemperatur eines beliebigen Teilchens während des Emporsteigens abnehmen, bis es sich schließlich in unendlicher Entfernung bis auf die Umgebungstemperatur abgekühlt hat. Da die Ausbreitung der Wärme durch reine Leitung sehr gering ist, muß die erfahrungsgemäß ziemlich rasche Abkühlung des aufsteigenden Luftstromes auf Mischung mit der umgebenden Luft beruhen. Es werden sich dabei die an der Außenseite liegenden Schichten zunächst abkühlen und wegen des dann wegfallenden Auftriebs zuerst zur Ruhe kommen, während die innen befindlichen Schichten weiter in die Höhe steigen müssen, um mit kalter Luft in Berührung zu kommen. Die Möglichkeit

einer Mischung hängt deswegen davon ab, wie weit ein Teilchen vom Rande entfernt ist; es muß daher auch die Höhe, bis zu welcher die innersten Luftteilchen bei einer bestimmten Abkühlung emporsteigen, wenigstens annähernd proportional der Ausdehnung der Heizfläche sein; es entspricht das wieder der Annahme, daß die Strömungsbilder bei verschiedenen Breiten B der Heizfläche ähnlich sind. Ebenso ist die bereits erwähnte mittlere Temperatur, welche der mittleren Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft entsprechen soll, proportional $(\tau_w - \tau_0)$ zu setzen.

Denkt man sich den Auftrieb hervorgebracht durch eine fiktive Höhe h, so muß nach Analogie mit den Betrachtungen bei der vertikalen Heizwand

$$h = C_1 \cdot C_2 \frac{B\tau}{T_1}$$

und ebenso die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher die Luft die Heizfläche bestreicht,

$$v = C_3 \sqrt{h} = C_4 \sqrt{\frac{B\tau}{T_1}} \text{ sein.}$$

Bei einer schrägliegenden Heizfläche findet Auftrieb nach beiden Arten statt. Die resultierende Auftriebshöhe setzt sich demnach aus zwei Teilen zusammen, deren Verhältnis von der Neigung der Fläche gegen die Horizontalebene abhängt. Nach den vorhergehenden Betrachtungen ist auch hier zu erwarten, daß bei Heizflächen gleicher Neigung und Form, aber verschiedener Größe die Strömungsbilder ähnlich sind und daß ebenso die mittlere Temperatur der aufsteigenden Luft proportional $\tau_w - \tau_0$) ist.

Die fiktive Auftriebshöhe ist dann, wenn S die Ausdehnung der Heizfläche in der größten Steigung gemessen,

$$h = C_1 \cdot C_2 \frac{S\tau}{T_1}$$

und

$$v = C_3 \sqrt{h} = C_4 \sqrt{\frac{S\tau}{T_1}}.$$

Eine Heizwand von beliebiger Form, z. B. die Oberfläche eines Heizkörpers, kann man sich aus lauter Flächenteilen zusammengesetzt denken, so daß Auftrieb sowohl an vertikalen als auch horizontalen und beliebig schräg liegenden Elementen in Frage kommt. Jedes Flächenelement trägt mit einer gewissen Teilhöhe $\Delta h = C_1 \cdot C_2 \frac{\Delta D \tau}{T_1}$ zum Gesamtauftrieb bei, wobei die Konstanten C_1 und C_2 sowohl von der Stellung und Lage der Flächenelemente als auch von der Konfiguration des ganzen Körpers

abhängen; mit ΔD soll die Größe des Flächenelements bezeichnet werden. Vergleicht man nun ähnliche Körper von verschiedener Größe (Dimension D), so muß, da Δh proportional ΔD zu setzen ist, die Summe für den Gesamtauftrieb in der Form

$$h = C_1 C_2 \frac{D\tau}{T_1}$$

sich darstellen lassen.

Das gleiche Resultat ergibt sich auch, wenn man für ähnliche Körper ähnliche Strömungsbilder voraussetzt. Bei Körpern von größeren Dimensionen ist dies ohne weiteres anzunehmen; denn die Tiefe, bis zu welcher die Wärme in die berührende Luft eindringt, hat die Größenordnung von Millimetern (ca. 1—10 mm), so daß derjenige Teil der Luft, welcher an dem Vorgang beteiligt ist, als dünne Hülle den Körper umgibt. Diese Hüllen haben ähnliche Form und daher Auftrieb proportional der Größe und proportional der Übertemperatur des Körpers. Bei kleinen Körpern, z. B. Drähten, ist dagegen die Dicke der Hülle von gleicher Größenordnung wie die Dimensionen des Körpers und beträgt bei sehr dünnen Drähten sogar ein Vielfaches des Drahtdurchmessers. Es ist daher noch zu untersuchen, ob die vorhergehenden Betrachtungen auch in diesem Bereich noch gültig sind.

Mit dieser Beschränkung kann dann allgemein für Körper ähnlicher Form die Auftriebshöhe

$$h = C_1 C_2 \frac{D\tau}{T_1}$$

gesetzt werden.

Damit wird die mittlere Auftriebsgeschwindigkeit

$$v = C_1 \sqrt{\frac{D\tau}{T_1}}$$

die äquivalente Schichtdicke

$$\delta = \text{const.} \sqrt{\frac{D}{v}}$$

und nach der Gleichung $Q = \text{const.}\ D\delta v\tau$, die fortgeführte Wärme

$$Q = \text{const.}\ D^{3/4} T_1^{-1/4} \tau^{5/4} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 18)}$$

oder pro Flächeneinheit

$$q = \text{const.} \frac{\tau^{5/4}}{\sqrt[4]{D T_1}} \quad \ldots \quad \text{(18a)}$$

Setzt man

$$Q = F \alpha_m \cdot \tau \quad \ldots \quad \text{(19)}$$

so wird

$$\alpha_m = \text{const.} \sqrt[4]{\frac{\iota}{DT_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

Es sollen zunächst diese Relationen mit den Versuchsergebnissen verglichen werden.

Versuche über Konvektion.

Die Wärmeabgabe eines in freier Luft befindlichen Körpers ist ein altes Problem der Physik. Wie bereits in dem Abschnitt über Strahlung ausgeführt wurde, hat schon Newton das nach ihm benannte Gesetz aufgestellt, wonach die abgegebene Wärmemenge $Q = C \cdot (\tau - \tau_0)$ gesetzt werden kann (C eine Konstante, sämtliche äußeren unbekannten Vorgänge, Form und Zustand der Oberfläche enthaltend). Nachdem dann eine Reihe von Physikern mit wechselndem Erfolg eine Bestätigung dieses Gesetzes versucht hatten, führten die Untersuchungen von Dulong und Petit[4] (1817) zu der fundamentalen Trennung der Vorgänge in Strahlung und Konvektion und zu deren quantitativen Festlegung in den heute noch bekannten Gesetzen.

Bei den Versuchen von Dulong und Petit wurde die Abkühlung eines Körpers (Thermometer mit großer Kugel) in einer geschwärzten Hohlkugel beobachtet, wobei die Hohlkugel erst mit Gasen von verschiedenem Druck gefüllt und dann zur Beseitigung der Konvektion evakuiert war. Nach den Bemerkungen auf S. 4 ist jedoch in letzterem Falle nicht reine Strahlung vorhanden, da selbst bei stark verdünnter Luft noch Wärmeleitung stattfindet, die nicht zu vernachlässigen ist. Die im folgenden angegebenen Gesetze von Dulong und Petit sind daher nicht streng begründet.*)

Es wurden so für die Wärmeabgabe durch Konvektion folgende Gesetze gefunden:

1. Die Konvektion ist unabhängig von der Natur der Oberfläche,
2. unabhängig von der Temperatur der Umgebung (Versuchsbereich 20—80° C),
3. allgemein kann die durch Konvektion fortgeführte Wärmemenge berechnet werden in der Form:

$$Q = m \cdot p^c \tau^{1{,}233},$$

wobei m eine Konstante abhängig von der Form des Körpers und der Natur des Gases, p den Druck des Gases, c eine

*) Vgl. hierüber auch: Wamsler, Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft. Dissertation, München 1909.

Konstante abhängig von der Gasart und τ die Übertemperatur des Körpers bedeutet.

Sowohl bei den genaueren Rechnungen von Lorenz als auch bei der hier ausgeführten Nährungsrechnung ergab sich die Konvektion abhängig von der Umgebungstemperatur in der Form $\frac{1}{\sqrt{T_1}}$ (T_1 absolute Temperatur der Umgebung in Grad Celsius). Für den Versuchsbereich $T_1 = 293$ bis 373 ergibt dies allerdings nur einen Unterschied von $\pm 3\,\%$ gegen den Mittelwert, so daß man im Gegensatz zur Strahlung die Konvektion als unabhängig von der Umgebungstemperatur betrachten kann. Außerdem war nach beiden Arten theoretisch $Q = \text{const.}\,\tau^{1,250}$, während durch Versuch $Q = \text{const.}\,\tau^{1,233}$ gefunden wurde. (Versuchsbereich 20 bis 260° C.) Der Verlauf der beiden Funktionen ist in Fig. 23 dargestellt. Obwohl die Absolutwerte merklich voneinander abweichen, ist die Form der Kurven doch fast die gleiche, da man beide Kurven mit Zeichengenauigkeit zur Deckung bringen kann, wenn man z. B. sämtliche Ordinaten der Funktion $\tau^{1,233}$ um $8\,\%$ vergrößert. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch ist also vollständig befriedigend.

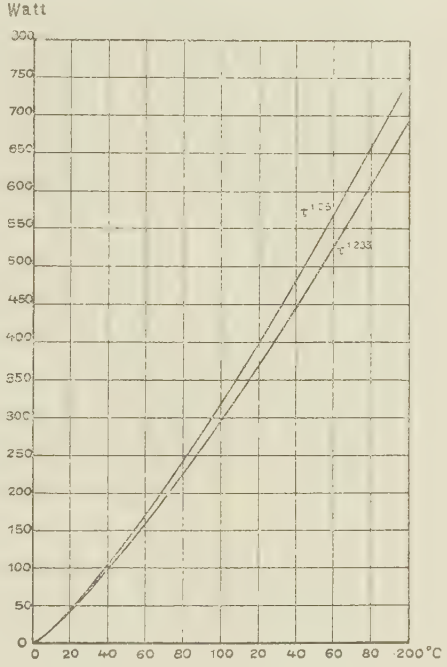


Fig. 23. Konvektion nach den Gesetzen $\tau^{1,25}$ und $\tau^{1,233}$.

Bei den im Folgenden angeführten Versuchen von Péclet ergab sich die Abhängigkeit der Konvektion von der Temperatur in der Form:

$$Q = C \cdot \tau \cdot (1 + 0{,}0075\,\tau).$$

Für den Versuchsbereich $\tau = 25$ bis 65° C stimmt dies mit der Form $Q = \text{const.}\,\tau^{1,25}$ überein mit einer maximalen Abweichung von etwa $1\,\%$. Man kann daher für Näherungsrechnung diese bequemere Form verwenden.

Bei den Versuchen von Péclet[11] (1860) wurde der numerische Wert der Konvektion abhängig von der Form und Größe des Körpers bestimmt. Die Versuchsanordnung war im Prinzip der von Dulong und Petit ähnlich; wie bereits in dem Abschnitt über Strahlung ausgeführt, waren jedoch zur Trennung von Strahlung und Konvektion die Versuchskörper erst berußt und dann blank poliert. Dieses Verfahren war jedoch nicht einwandfrei, da hierbei das Strahlungsgesetz von Dulong und Petit zugrunde gelegt war (s. Seite 4).*)

Es ergab sich auch hier, daß die Konvektion unabhängig von der Temperatur der Umgebung ist, während sie nach den vorliegenden Untersuchungen mit $1 : \sqrt[4]{T_1}$ (T_1 = Absoluttemperatur der Umgebung) sich ändern sollte. Bei den Pécletschen Versuchen wurde jedoch die Umgebungstemperatur zu wenig geändert, um den an sich geringen Einfluß von $1 : \sqrt[4]{T_1}$ erkennen zu können.

Dagegen scheinen die Pécletschen Versuche ganz gut zu bestätigen, daß bei ähnlichen Körpern die pro Flächeneinheit abgegebenen Wärmemengen sich wie $1 : \sqrt[4]{D}$ verhalten; denn die anders lautenden Beziehungen von Péclet:

Vertikale Ebene: $q = \text{const.} \left(1 + \frac{0{,}36}{\sqrt{H}}\right)$

H = Höhe in m; Versuchsbereich nicht angegeben,

Kugel: $q = \text{const.} \left(1 + \frac{0{,}146}{\sqrt{D}}\right)$

D = Durchmesser in m; Versuchsbereich $D = 0{,}05 - 0{,}30$ m,

Horizontaler Zylinder: $q = \text{const.} \left(1 + \frac{0{,}037}{D}\right)$

D = Durchmesser in m; Versuchsbereich $D = 0{,}03 - 0{,}30$ m,

Vertikaler Zylinder: $q = \text{const.} \left(1 + \frac{0{,}0067}{\sqrt{D}}\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}36}{\sqrt{H}}\right)$

D = Durchmesser in m, H = Höhe in m; Versuchsbereich $D = 0{,}03$ bis $0{,}30$ m, $H = 0{,}05$ bis $0{,}50$ m,

können innerhalb des Versuchsbereichs ohne große Abweichungen auch auf die Form $q = \frac{\text{const.}}{\sqrt[4]{D}}$ gebracht werden, wobei jetzt D maßgebend sein soll für die Größe ähnlicher Körper.

*) Vgl. hierüber: Nusselt, Die Wärmeleitfähigkeit von Wärmeisolierstoffen. Dissertation, München 1907 und Wamsler, l. c.

Man kann aus den Versuchen von Péclet die Konstanten für die oben abgeleiteten Konvektionsgesetze (s. Seite 49/50) bestimmen. Es hat sich jedoch herausgestellt, daß die sich ergebenden Werte zu klein sind gegenüber vielen Beobachtungen der Praxis. Dabei ist zu beachten, daß bei Péclet die Versuchskörper in einem großen Hohlzylinder hingen und daher vor fremdem Luftzug geschützt waren; im Zimmer und besonders im Freien kann auch bei scheinbar ruhiger Atmosphäre die durch Konvektion abgegebene Wärme beträchtlich größer werden. Aus diesem Grunde wurde von einer Wiedergabe der Pécletschen Konstanten abgesehen.

In neuester Zeit wurden eingehendere Versuche über Konvektion von Wamsler (s. Fußnote Seite 4) ausgeführt. Als Versuchskörper dienten frei im Raume horizontal aufgehängte Rohre von verschiedenem Durchmesser. Die abgegebene Wärme kann darnach sehr gut proportional $\tau^{1{,}25}$ gesetzt werden, während die pro Flächeneinheit abgegebene Wärmemenge in der Form $\frac{1}{\sqrt[3{,}3]{D}}$ vom Rohrdurchmesser abhängt (innerhalb der Grenzen $D = 20{,}5$ bis 89 mm).

Es ist zu bemerken, daß die bisherigen Betrachtungen nur so lange gelten, als die Dicke der beteiligten Luftschicht klein gegenüber den Dimensionen des Körpers bleibt. Diese Bedingung ist bei dünnen Drähten nicht mehr erfüllt. Die Erfahrung zeigt auch, daß hier andere Gesetze gelten.

II. Teil.

Erwärmung der elektrischen Maschinen.

In allgemeinster Auffassung tritt das Erwärmungsproblem in der Elektrotechnik auf in der Form: In den Wicklungen und im aktiven Eisen der Maschinen wird Wärme entwickelt, kommt durch Leitung an die Oberfläche dieser Teile und gelangt von hier aus in die Atmosphäre; welche Temperaturerhöhung tritt bei vorgeschriebener Wärmeproduktion in den Wicklungen und im Eisen auf?

Die entwickelte Wärme bewegt sich zuerst im Innern des Körpers, bis sie an die Oberfläche kommt. Von hier wird ein Teil abgestrahlt; der andere Teil geht an die berührende Luft über und wird mit dieser auf irgend einem Wege in die Atmosphäre geführt. Diese ist als Reservoir von unendlich großem Fassungsvermögen zu betrachten und daher als Nullniveau für den Vorgang aufzufassen. Entsprechend diesem Verlauf des Wärmestromes kann das vorhandene Temperaturgefälle in zwei Hauptstufen unterteilt werden: Erstens vom Ort der Wärmeentwicklung bis zur Oberfläche und zweitens von der Oberfläche bis ins Nullniveau.

Im folgenden soll ausschließlich der äußere Temperaturabfall untersucht werden und zwar für den Fall, daß die Temperaturverteilung an der ganzen Maschine stationär geworden ist.

Für den äußeren Wärmeübergang ist es wesentlich, in welcher Weise die wärmeproduzierenden Teile von der Luft bespült werden; es sollen daher alle darauf bezüglichen Erscheinungen erst in einem Abschnitt über Lüftung näher betrachtet werden. Die weitere Untersuchung über den Übergang der Wärme auf die bewegte Luft ist dann Gegenstand des zweiten Abschnittes über Kühlung.

Abschnitt I.

Lüftung elektrischer Maschinen.

1. Beschreibung der Luftbewegungen.

Es sollen zunächst diejenigen Luftbewegungen betrachtet werden, welche die Maschine selbst hervorbringt und die deshalb als natürliche Ventilation zu bezeichnen sind.

Läßt man einen Zylinder mit geschlossener Oberfläche um seine Achse rotieren, so wird die ihn berührende Luftschicht durch Reibung mitgenommen und erhält dabei eine Geschwindigkeit, die unmittelbar an der Oberfläche am größten ist, mit der Entfernung davon abnimmt und in größerem Abstand unmerklich wird. Die Tiefe, bis zu welcher die Luft an dem Vorgang beteiligt ist, hängt wesentlich von den Unebenheiten der Oberfläche ab. Wegen der Wirkung der Zentrifugalkraft können die mitgerissenen Teilchen nicht einfach Kreisbahnen um die Rotationsachse beschreiben, sondern werden nach außen geschleudert. Da zum Ersatz sofort andere Teilchen an die Stelle der fortgerissenen strömen müssen, tritt einerseits eine lebhafte Wirbelbewegung der Luft in der Nähe der Oberfläche ein, anderseits bilden sich auch regelmäßige Luftströmungen aus. Es bewegt sich Frischluft in axialer Richtung auf die Stirnflächen zu; sobald Berührung damit eintritt, erhalten die Luftteilchen eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente durch Reibung an der Oberfläche und eine von der Kreisbahn wegführende Geschwindigkeitskomponente durch Zentrifugalkraft, so daß sie sich ungefähr in den in Fig. 24 *a* angedeuteten Bahnen (auf den ruhenden Raum bezogen) nach außen bewegen.

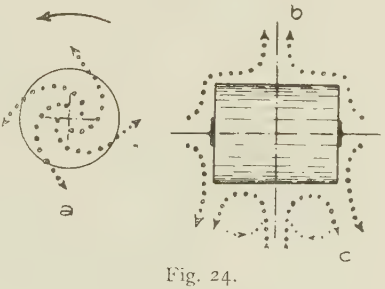


Fig. 24.

Die mit der Mantelfläche in Berührung befindlichen Teilchen haben wegen der Zentrifugalkraft ebenfalls Bewegungsantrieb und werden demselben folgend sich nach außen bewegen. Der eintretende Strömungszustand muß so beschaffen sein, daß in allen Punkten auf einem Kreis um die Rotationsachse gleiche Bewegungsrichtung vorhanden ist, die Luft also entweder auf den Mantel zuströmt oder davon abströmt. Um daher eine Lufterneuerung an der Mantelfläche zu ermöglichen, muß auch am Mantel eine axiale Bewegung eintreten. Bei langen Zylindern bildet sich dadurch der

in Fig. 24 *b* skizzierte Strömungszustand aus, so daß also die Luft von beiden Seiten zu- und in der Mitte abströmt. Wenn jedoch die Stirnflächen kräftig Luft fördern, z. B. wegen hervorstehender Teile, tritt umgekehrt in der Mitte Zufluß und an beiden Seiten Abfluß ein, wie in Fig. 24 *c* skizziert. So kann man z. B. bei Scheiben beobachten, daß eine in die Mittelebene hereingebrachte Fahne sich an die Zylinderfläche anlegt und nicht abgeschleudert wird.

Die hier geschilderte Art der Luftbewegung kommt in Frage bei glatten Ankern und in allen Fällen, bei welchen der Rotor eine geschlossene Mantelfläche hat. Der bei dieser Anordnung erreichbare Luftwechsel, auf welchen es bei der Kühlung ankommt, ist relativ gering.

Man hat daher zur Verstärkung der Ventilation den Rotor mit Luftschlitzen versehen. Dabei wird das Rotoreisen in Pakete von 3—8 cm Breite geteilt, so daß zwischen je 2 Paketen ein Kanal von etwa 5—15 mm bleibt (s. Fig. 25). Bei dieser Anordnung, welche nur für Nutenanker Zweck hat, ist die Luftführung eine wesentlich bessere. Die zum Auseinanderhalten der Pakete erforderlichen Distanzstücke in den Luftschlitzen sind so ausgebildet, daß sie wie Schaufeln eines Ventilators wirken. Die Luft wird axial angesaugt und durch die Schlitze nach außen geworfen. Eine ähnliche Art der Ventilation kann auch für die Wicklung außerhalb des Eisens ausgeführt werden, indem man die Wicklungsstäbe nicht dicht nebeneinander führt, sondern dazwischen Raum für den Durchgang der Luft läßt.

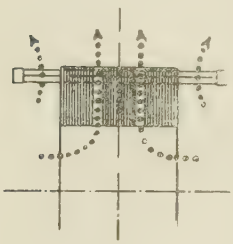


Fig. 25.

Bei Rotoren mit ausgeprägten Magnetpolen, z. B. bei Wechselstrom-Innenpolmaschinen, wird die zwischen den Polen befindliche Luft durch Zentrifugalkraft nach außen getrieben und muß durch seitlich zuströmende Frischluft ersetzt werden, so daß sich der in Fig. 26 gezeichnete Strömungszustand einstellt. Man kann das Polrad als einen Ventilator mit sehr dicken Schaufeln auffassen. Auch die Stirnflächen der Magnete werden von Frischluft bestrichen, indem sich eine Strömung ausbildet, wie sie bereits beim rotierenden Zylinder näher besprochen wurde (Seite 55 und Fig. 24 *a*).

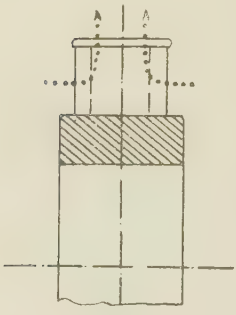


Fig. 26.

Obwohl diese drei hauptsächlich in Frage kommenden Anordnungen zunächst sehr verschieden aussehen, besteht doch kein prinzipieller Unterschied in der Wirkungsweise. Die Luft wird immer axial angesaugt und durch die Zentrifugalkraft nach außen geschleudert; nur ist je nach der Anordnung diese Ventilatorwirkung mehr oder weniger vollkommen.

Die vom Rotor geförderte Luft wird in allen Fällen an den feststehenden Teil der Maschine, den Stator getrieben. Dieser ist ähnlich wie der Rotor ausgebildet, entweder mit kontinuierlichem Eisen und Luftschlitzen, z. B. bei Wechselstrom-Innenpolgeneratoren, Induktionsmotoren, oder besitzt ausgeprägte Magnetpole, wie z. B. bei Gleichstrommaschinen. Der Stator verhindert teilweise das freie Abströmen der vom Rotor geschleuderten Luft, so daß in dem ringförmigen Spalt zwischen Rotor und Stator eine Luftpressung auftritt. Diese bewirkt, daß die Luft auch axial aus dem Luftspalt ausweicht. Wenn der Stator keine Luftkanäle hat, ist dies der einzige Weg, den die Luft nehmen kann. Sind Luftkanäle vorhanden, so nehmen auch diese einen Teil der geförderten Luft auf. Es wird also wesentlich vom Aufbau des Stators abhängen, wie sich die Luft auf die beiden Wege verteilt.

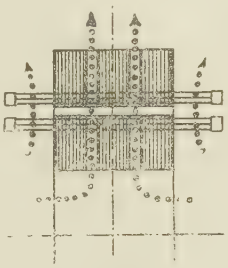


Fig. 27.

Wenn z. B. der Rotor und Stator in gleicher Weise aus kontinuierlichem Eisen mit Luftschlitzen sind, wobei dann gewöhnlich nur ein kleiner Luftspalt vorhanden ist (z. B. Induktionsmotoren), so muß die Luft beim Übertritt vom Rotor in den Stator eine Richtungsänderung vornehmen. Ein den Rotor verlassendes Teilchen hat erstens die Umfangsgeschwindigkeit u gegen den ruhenden Raum und zweitens im Luftkanal des Rotors die Relativgeschwindigkeit v. Die wirkliche Geschwindigkeit w und deren Richtung, mit welcher das Teilchen den Rotor verläßt, ergibt sich aus dem Geschwindigkeitsdreieck. Der Eintritt in den Stator, welcher radial erfolgen sollte, kann deswegen nur stoßweise vor sich gehen. Außerdem ist der Vorgang nicht kontinuierlich, da den Lücken des Rotors abwechselnd eine Lücke oder ein Wicklungsteil gegenübersteht (Pfeifen). Aus beiden Gründen tritt am Stator ein Rückstau und damit Luftpressung in dem Raume zwischen Stator und Rotor ein. Wie

Fig. 28.

bereits erwähnt, entweicht deswegen ein Teil der vom Rotor geförderten Luft auch axial; die diesen Weg befolgenden Luftteilchen haben eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente wegen der Rotation und eine axiale Geschwindigkeitskomponente und bestreichen daher in der in Fig. 29 gezeichneten Weise die innere Statorzylinderfläche schräg nach außen.

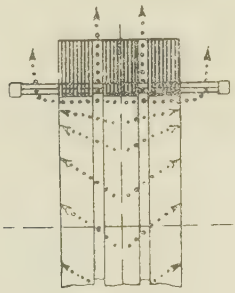


Fig. 29.

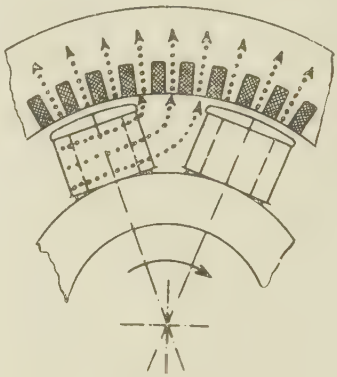


Fig. 30.

Ähnliche Vorgänge finden auch statt, wenn der Rotor ausgeprägte Magnetpole hat. Die Luftförderung des Rotors ist hier ziemlich gleichmäßig, da den Lücken des Polrandes immer mehrere Öffnungen im Stator gegenüberstehen. Dagegen ist die Luftlieferung für eine bestimmte Stelle des Stators eine periodische, da einer Öffnung im Stator abwechselnd eine Pollücke und ein Polschuh gegenübersteht. In letzterem Falle hört jedoch die Luftförderung für einen Statorkanal nicht ganz auf, da auch hier wegen der Eintrittschwierigkeiten in den Stator Rückstau stattfindet und im ganzen Spalt zwischen Rotor und Stator Luftpressung vorhanden ist. Es findet daher auch bei dieser Anordnung axiale Bewegung der zwischen Rotor und Stator befindlichen Luft statt ähnlich wie in Fig. 29 angedeutet.

Wenn umgekehrt der Rotor zylindrisch ist und der Stator ausgeprägte Pole hat, so steht den Luftkanälen des Ankers abwechselnd das Poleisen oder die Lücke zwischen zwei Polen gegenüber. Es schwankt daher die Luftförderung eines Rotorkanals periodisch. In der Pollücke kann die Luft frei abströmen. Die Richtung, mit welcher die Luftteilchen an dieser Stelle den Rotor verlassen, ergibt sich wie oben aus dem Geschwindigkeitsdreieck. Der Luftstrom bläst daher stark gegen die auflaufende Polkante und die Oberfläche der Magnetwicklung (s. Fig. 31a), während an

den gegenüberliegenden Stellen nur geringe Luftbewegung vorhanden ist. Zugleich tritt in der neutralen Zone ein deutlich ausgeprägter Wirbelring (s. Fig. 31a) auf, wie man ohne weiteres mit einer leichten Fahne (Seide oder Wolle) nachweisen kann. Bei Maschinen mit Wendepolen äußert sich dies in der Weise, daß nur an der auflaufenden Polspitze Luft in den Raum zwischen Hauptpol und Wendepol strömt, während an der symmetrisch liegenden Stelle (ablaufende Polkante) kaum eine Luftbewegung nachzuweisen ist. Aus diesem Grunde und wegen der teilweisen Abdeckung des freien Austrittsquerschnitts wird durch Einbau von Wendepolen die Luftförderung des Rotors sehr beeinträchtigt.

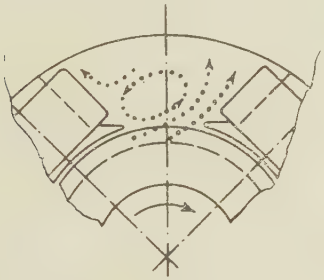


Fig. 31a.

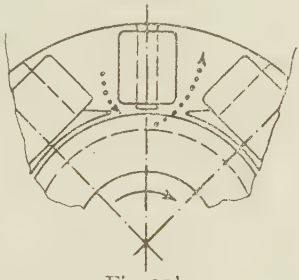


Fig. 31b.

Bei den unter dem Poleisen liegenden Luftkanälen ist der Luftaustritt stark gehindert; es tritt daher ähnlich wie in den bereits besprochenen Fällen in dem Spalt zwischen Rotor und Poleisen Luftpressung ein. Die Untersuchung an vielen Maschinen zeigt aber, daß trotzdem kein axiales Entweichen nach beiden Seiten eintritt, wenn in der allgemein üblichen Weise an beiden Ankerseiten durch Stehbleche und Spannplatten Luftkanäle gebildet werden. Der daraus geschleuderte kräftige Luftstrom verhindert anscheinend ein axiales Entweichen der Luft unter dem Polschuh.

In allen Fällen werden auch die Stirnseiten des Stators und die außerhalb desselben befindlichen Wicklungsteile von Frischluft bespült, indem z. B. Polrotoren durch die Stirnflächen des Rotors (vgl. Fig. 26 und 29) oder bei Zylinderrotoren durch die Öffnungen der Rotorwicklung (vgl. Fig. 26 und 27) Frischluft nach den gegenüberstehenden Statorteilen geschleudert wird.

Die Aufgabe, an jeder beliebigen Stelle der Maschine die Richtung des Luftstromes sowie dessen Geschwindigkeit zu bestimmen, würde ziemlich kompliziert sein. Es soll daher für die rechnerische Verfolgung der Vorgänge ein idealisiertes Schema aufgestellt werden, welches das Strömungsbild in seinen Haupt-

zügen darstellt. Obwohl die verschiedenen Maschinengattungen charakteristische Unterschiede in ihrem Aufbau aufweisen, kann dieses Schema doch allgemein verwendet werden; es treten nur je nach der Anordnung bestimmte Vereinfachungen auf.

Verfolgt man ein Luftteilchen auf seinem Wege, von der als ruhig angenommenen Umgebung durch die Maschine bis wieder in die Atmosphäre, so sind sechs Stellen besonders wichtig:

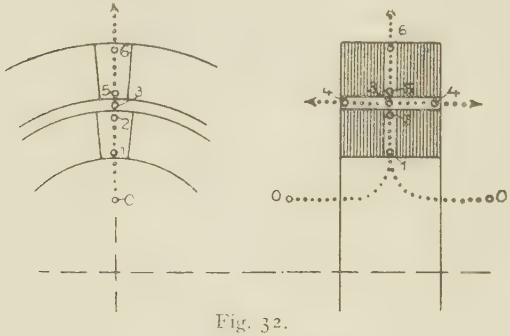


Fig. 32.

Die Luft strömt an der Stelle *0* in axialer Richtung mit der Geschwindigkeit w_0 auf den Rotor (Stelle 1); der Eintritt muß nach dem Geschwindigkeitsdreieck mit der wahren Geschwindigkeit w_1 (auf den ruhenden Raum bezogen) erfolgen. Während der Eintrittsperiode muß daher die Luft neben der axialen Geschwindigkeit v_1 (im Rotor) allmählich noch die Umfangsgeschwindigkeit annehmen. Aus diesem Grunde setzt bereits in einiger Entfernung vom Rotor eine schraubenförmige Bewegung ein, die sich bei Annäherung an denselben verstärkt; da aber dabei ein Teilchen nie die volle, dem Abstand von der Rotationsachse entsprechende Umfangsgeschwindigkeit erreicht, erfolgt der Eintritt stoßweiße. Auf dem Wege von Punkt *1* bis vor die Austrittsstelle *2* tritt Ventilatorwirkung ein, so daß ein Teilchen an der Stelle *2* die volle Rotorumfangsgeschwindigkeit u_2 und eine gewisse Pressung erhält. Der Austritt aus dem Rotor erfolgt mit der absoluten Geschwindigkeit w_2, die sich aus dem Austrittsdreieck mit der Umfangsgeschwindigkeit u_2 und der Geschwindigkeit v_2 im Rotorkanal ergibt. Wegen des Rückstaues durch den Stator muß in dem Raume zwischen Rotor und Stator eine gewisse Pressung herrschen; zugleich (Punkt *3*) findet hier eine Spaltung der Strömungsrichtungen statt. Ein Teil der Luft tritt in den Stator ein, der Rest muß nach beiden Seiten entweichen. Der Eintritt in die Kanäle des Stators kann wegen der radialen Richtung derselben nicht stoßfrei erfolgen. An der Stelle *5*, durch welche sich die Luft mit der Kanalgeschwindigkeit $v_5 = w_5$ bewegt, muß noch eine kleine Pressung vorhanden sein zur Überwindung der Austrittswiderstände. Der Austritt aus dem Stator

erfolgt an der Stelle *6* mit einer relativ geringen Geschwindigkeit w_6, die sich allmählich in der Umgebung verliert. Die vom Punkte *3* aus in axialer Richtung strömende Luft gelangt in dem Punkt *4*, an welchem nur mehr geringe Pressung herrscht, zum Austritt. Von hier aus müßte freier Abfluß in die Atmosphäre erfolgen können. Man macht aber nicht selten die Beobachtung, daß der Weg für die Abluft durch Konstruktionsteile, Lagerschilder versperrt ist, so daß ein Teil wieder in die Frischluftströmung bei *0* gelangt und ein fortwährender Kreislauf eintritt. Durch eine besondere Abluftführung kann dieser Übelstand vermieden werden.

In manchen Fällen genügt die durch den Rotor hervorgebrachte natürliche Lüftung nicht oder ist aus äußeren Gründen nicht zulässig. Man muß dann der Maschine von außen Kühlluft zuführen und bezeichnet das als künstliche Ventilation.

Je nach der Luftführung in der Maschine kann man hauptsächlich zwei Anordnungen unterscheiden:

Radiale Ventilation. Sowohl der Rotor als auch der Stator besitzen radiale Luftkanäle. Wie bereits erwähnt, werden diese in der Weise gebildet, daß die einzelnen Blechpakete durch Distanzstücke in ca. 0,5 — 1,5 cm Abstand gehalten werden (vgl. Fig. 27). Besitzt der Rotor oder der Stator ausgeprägte Magnetpole, so sind die Lücken zwischen je zwei Polen (s. Fig. 30 und Fig. 31) als radiale Kanäle aufzufassen. Die Luftführung ist genau dieselbe wie bei der natürlichen Ventilation. Der Rotor erhält Frischluft zugeführt, die erst die Rotorkanäle durchfließt und dann in die Statorkanäle übertritt; der Stator hat keine Frischluftzuführung. Diese Art der Ventilation, welche einfach eine Verstärkung der natürlichen Ventilation bedeutet, hat zwei Nachteile. Erstens erhält der Stator bereits im Rotor vorgewärmte Luft; zweitens kann der Übertritt vom Rotor in den Stator nicht stoßfrei erfolgen und ist daher mit großen Energieverlusten verbunden. Die einfachste Ausführung ist die, daß man an der normal ausgeführten Maschine den Rotor auf der einen Seite an den Frischluftkanal anschließt und auf der anderen Stirnseite abschließt; in vielen Fällen wird die Maschine vollständig gekapselt mit je einer Öffnung für Frischluft und für Abluft. Die Luftzuführung geschieht meistens mit Überdruck, manchmal auch mit Unterdruck an der Abluftöffnung, oder kann auch durch einen auf der Rotorwelle sitzenden Ventilator im Innern der Maschine bewirkt werden.

Axiale Ventilation. Sowohl der Rotor als auch der Stator erhalten axial, also quer zu den Blechen Luftkanäle. Die

einfachste Luftführung ist die, daß man auf der einen Seite die Maschine vollständig schließt und aus der entsprechenden Kammer gleichzeitig in Rotor und Stator durch Überdruck Luft treibt; auf der anderen Seite kann die Luft frei austreten oder wird in einen besonderen Abluftkanal geleitet. Der Eintritt der Luft in den Rotor kann nicht in axialer Richtung erfolgen; denn ein Luftteilchen muß an der Eintrittsstelle neben der Kanalgeschwindigkeit v_1 in axialer Richtung noch die Umfangsgeschwindigkeit u_1 besitzen. Letztere kann nicht durch Pressung im Druckraum, sondern nur durch Reibung am Rotor erzeugt werden. Es bestehen daher besonders bei schnell laufenden Maschinen für den Rotor gewisse Eintrittsschwierigkeiten, so daß der größere Teil der Frischluft den Weg durch den Stator nehmen kann. Es ist daher anzustreben die Frischluft möglichst an Stellen mit geringer Umfangsgeschwindigkeit zuzuführen. Die Erscheinung kann vermieden werden, wenn man der Luft durch besondere Führungsbleche die für den Eintritt günstigste Strömungsrichtung gibt. Die axiale Kühlung hat die Vorteile, daß Rotor und Stator Frischluft erhalten und Verluste beim Eintritt der Luft in den Stator nicht auftreten. Der zum Durchtreiben der Luft erforderliche Druck wird entweder außerhalb der Maschine erzeugt oder bei schnellaufenden Maschinen durch einen oder zwei Ventilatoren (zur getrennten Luftlieferung für Rotor und Stator) auf der Rotorwelle hervorgebracht.

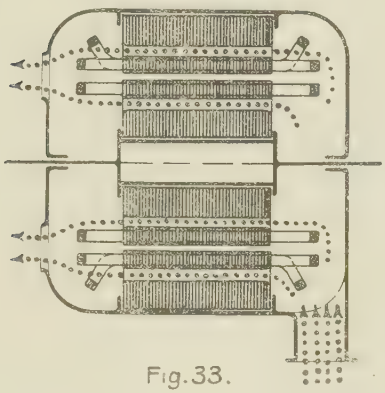


Fig. 33.

In manchen Fällen kommen beide Arten von Ventilation gleichzeitig vor. So erhalten z. B. Außenpolmaschinen zweckmäßig radiale Rotorlüftung und axiale Statorlüftung durch die Pollücken. Bei kompensierten Maschinen System Deri hat der Rotor radiale Schlitze, der Stator radiale und axiale Kanäle.

2. Rechnerische Verfolgung der Vorgänge.

Das Ziel der folgenden Rechnungen ist, die Geschwindigkeit der Kühlluft an der Oberfläche und in den Luftkanälen von Rotor und Stator zu ermitteln. Wie bereits erwähnt, können dabei nicht die Vorgänge in jeder beliebigen Stelle, sondern nur die Hauptströmungen in großen Zügen verfolgt werden.

Auf dem Wege von der ruhigen Atmosphäre durch die Maschine bis wieder in die ruhige Atmosphäre ist für ein bestimmtes Luftteilchen sowohl die Geschwindigkeit als auch der Druck an jeder Stelle verschieden. Um die Vorgänge genauer verfolgen zu können, müssen daher erst die Grundgesetze der Aerodynamik behandelt werden.

Es ist zunächst zu bemerken, daß die bei der Lüftung von elektrischen Maschinen auftretenden Druckänderungen klein sind und fast in allen Fällen unter 0,01 kg/cm² bleiben. Dementsprechend sind auch die Volumenänderungen kleiner als 1 %, so daß man in allen folgenden Betrachtungen mit vollständig genügender Genauigkeit die Luft als inkompressible Flüssigkeit betrachten kann.

Es soll nun der Fall untersucht werden, daß sich Luft in einer Leitung von veränderlichem Querschnitt bewegt und zwar unter der vorläufigen Annahme, daß weder innere Reibung noch Reibung an den Wänden auftrete.

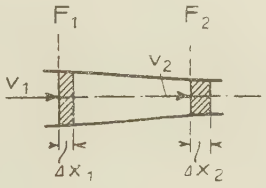


Fig. 34.

Auf dem Wege vom Querschnitt F_1 bis zum Querschnitt F_2 steigt die Geschwindigkeit allmählich von v_1 auf v_2; es muß also in dieser Richtung eine Beschleunigungsdruckdifferenz vorhanden sein und dementsprechend der Druck im Querschnitt F_1 größer sein als im Querschnitt F_2. Diese Druckdifferenz kann in einfacher Weise nach dem Energieprinzip berechnet werden.

Innerhalb eines Zeitelements passiert jeden Querschnitt das Flüssigkeitsvolumen ΔV, so daß im Querschnitt F_1 die Verschiebung $\Delta x_1 = \Delta V : F_1$ und im Querschnitt F_2 die Verschiebung $\Delta x_2 = \Delta V : F_2$ eintritt. Sind die entsprechenden Flüssigkeitsdrücke p_1 und p_2, so wird auf den Querschnitt F_1 die Arbeit übertragen $F_1 p_1 \Delta x_1$, während in Querschnitt F_2 die Arbeit $F_2 p_2 \Delta x_2$ wieder abgegeben werden muß, um die davor befindliche Flüssigkeit wegzuschieben. Die Differenz beider Arbeitsbeträge wird, da keinerlei Reibungsarbeit geleistet werden soll, verwendet zur Erhöhung der kinetischen Energie der Flüssigkeit. Es muß also sein

$$F_1 p_1 \Delta x_1 - F_2 p_2 \Delta x_2 = \frac{\Delta V \gamma}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$$

oder da $F_1 \Delta x_1 = \Delta V = F_2 \Delta x_2$ auch

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{2g} v_2^2 - \frac{\gamma}{2g} v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 20)}$$

Für den wichtigen Spezialfall, daß die Geschwindigkeit $v_1 = 0$ ist, ergibt sich

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{2g} v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 20a)}$$

Damit also Luft aus dem Ruhezustand bis zur Geschwindigkeit v sich beschleunige, ist die Druckdifferenz $\frac{\gamma}{2g} v^2$ erforderlich. Strömt z. B. Luft aus einem Behälter mit Überdruck aus, so ist die erreichte Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)}.$$

Diese Formel gilt nur für die kleinen Druckunterschiede, wie sie in der Lüftungstechnik vorkommen.

Die bisher gemachte Voraussetzung, daß sich die Luft wie eine vollkommene Flüssigkeit bewege, ist in Wirklichkeit nicht erfüllt. Sowohl durch Reibung an den Rohrwänden als auch in der Luftmasse selbst wird der Strömungsvorgang wesentlich beeinflußt. Betrachtet man den einfachsten Fall, Bewegung der Luft in einem zylindrischen Rohre, so würden bei einer vollkommenen Flüssigkeit die einzelnen Teilchen einfach mit gleicher Geschwindigkeit parallel zur Rohrachse sich bewegen. In Wirklichkeit wird jedoch der Luftstrom durch die Unebenheiten der Rohrwand (äußere Reibung) zunächst am Rande zurückgehalten; aber auch auf die weiter abliegenden Schichten ist dies noch von Einfluß wegen der inneren Reibung, welche der Verschiebung zweier Luftschichten gegeneinander Widerstand entgegensetzt. Der eintretende Strömungszustand ist daher so beschaffen, daß die Teilchen zwar noch parallele Bahnen zur Rohrachse beschreiben, die Geschwindigkeit aber von einem Höchstwert in der Mitte allmählich nach dem Rande zu abnimmt und hier selbst zu Null wird.

Nach den grundlegenden Untersuchungen von Osborne Reynolds[20] (1883) ist jedoch nur bei ganz kleinen Geschwindigkeiten eine solche Bewegung in Form von Stromfäden vorhanden; über einer gewissen Geschwindigkeit, welche als kritische Geschwindigkeit bezeichnet wird, zerfallen die Stromfäden, so daß eine anscheinend regellose Durcheinanderbewegung eintritt. Im allgemeinen stellt daher ein Flüssigkeits- oder Luftstrom ein ziemlich kompliziertes Gebilde dar; in einem beliebigen festen Punkt wechselt die Geschwindigkeit unregelmäßig ihre Größe und Richtung. Man bezeichnet dies als turbulente Bewegung.

Die Versuche, die turbulente Bewegung auf analytischem Wege zu verfolgen, haben bis jetzt zu einem befriedigenden Ergebnis nicht geführt. Man muß daher die Vorgänge idealisieren und nimmt für praktische Rechnungen gewöhnlich an, daß durch jeden Querschnitt eines Kanals die Luft gleichmäßig mit einer mittleren Geschwindigkeit v, die durch Division von Luftmenge durch Querschnitt an der betreffenden Stelle berechnet wird, strömt. Zur Aufrechterhaltung der Bewegung ist daher erforderlich

1. der Beschleunigungsdruck

$$\gamma \frac{v^2}{2g}$$

um die Luft aus dem Ruhezustand auf die Geschwindigkeit v zu bringen.

2. die Druckdifferenz zur Überwindung der Widerstände.

Dabei sind zu den Widerständen nicht nur die innere und äußere Reibung, sondern auch plötzliche Querschnittsänderungen und Kontraktionen, Stoß und Wirbelbildung, die alle erfahrungsgemäß Druckverlust mit sich bringen, zu rechnen.

Die Erfahrung zeigt, daß die zur Überwindung der Widerstände erforderliche Druckdifferenz unterhalb der kritischen Geschwindigkeit annähernd proportional mit v, dagegen bei höheren Geschwindigkeiten eher mit v^2 wächst. Bei den hier zu betrachtenden Fällen der Lüftungstechnik ist die kritische Geschwindigkeit immer überschritten, so daß man allgemein die zur Überwindung der Widerstände erforderliche Druckdifferenz gleich

$$\zeta \cdot \gamma \frac{v^2}{2g}$$

setzt. Obwohl diese Formulierung nicht als strenges Naturgesetz aufzufassen ist, werden damit doch die Erfahrungsresultate noch am besten wiedergegeben. Der Faktor ζ, welcher ohne weiteres den Vergleich mit der Beschleunigungsdruckdifferenz gibt, wird der Widerstandskoeffizient genannt und ist durch Versuch zu bestimmen.

Die gesamte erforderliche Druckdifferenz ist dann

$$p = (1 + \zeta)\gamma \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 21)}$$

Die in der Lüftungstechnik vorkommenden Druckdifferenzen sind relativ klein; man gibt sie daher nicht in kg/qcm an, sondern mißt sie durch die Höhe einer Wassersäule, welche gleichen Druck hervorbringt. Setzt man für die Konstanten die Werte

$\gamma = 0{,}0011 \frac{gr}{cm^3}$ (bezogen auf die häufig vorkommende Lufttemperatur $\tau = 50^0$ C) und $g = 981 \frac{cm}{sek.^2}$, so ergibt sich

$$\underline{h = 0{,}056\,(1 + \zeta)\,v^2} \text{ in mm W.S.} \quad \text{(Gl. 21a)}$$

wenn v in m/sek. eingesetzt wird.

Werte von ζ.

Die Reibung an den Kanalwänden hängt von der Form und Größe des Kanalquerschnitts ab und ist proportional der Kanallänge zu setzen. Bei Versuchen an Gasrohren (Oberfläche ohne besondere Behandlung) von 16—50 mm lichtem Durchmesser ergab sich ziemlich unabhängig vom Durchschnitt

pro 1 m Kanallänge $\zeta = 0{,}5$.

Man kann diesen Wert angenähert auch für die Kanäle elektrischer Maschinen verwenden, wobei aber gleich bemerkt werden soll, daß dort die Reibung an den Wandungen fast immer gegenüber den Widerständen durch plötzlichen Richtungswechsel, Stoß usw. vernachlässigt werden kann.

Bei plötzlichem Richtungswechsel ist zu setzen (nach Rietschel[28]):

Abweichung 90^0 ⌋ $\zeta = 1{,}5$

„ 45^0 ⌋/ $\zeta = 0{,}6$

Plötzliche Querschnittsänderungen: Wenn Luft in einen Kanal strömt, in welchem beliebige Querschnittsänderungen vorkommen, so wäre nach Gleichung 20 Seite 63 die erforderliche Druckdifferenz nur durch die Geschwindigkeit im Anfangs- und Endquerschnitt bestimmt. In Wirklichkeit trifft dies nur bei ganz allmählichen Querschnittsänderungen zu; andernfalls kann die Luft nicht schnell genug auf die kleinere Geschwindigkeit v_2 (s. Fig. 35) verzögert werden, sondern strömt erst mit der höheren Geschwindigkeit in die Erweiterung und kommt hier allmählich auf die Geschwindigkeit v_2. Für Berechnung des dadurch verursachten Druckverlustes ist zu setzen (bezogen auf v_2)

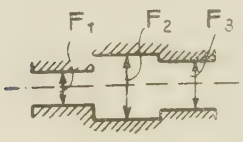


Fig. 35.

$$\zeta = \left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right)^2.$$

In elektrischen Maschinen treten beim Einströmen der Luft in den rotierenden Teil oder beim Übertritt vom rotierenden Teil zum feststehenden Teil noch bedeutend größere Werte auf $\zeta = 2{,}5 - 10$.

Berechnung der natürlichen Lüftung.

Für die Berechnung der Luftströmungen soll das auf Seite 60 angegebene idealisierte Schema zugrunde gelegt werden.

Die Atmosphäre in der Umgebung der Maschine hat den absoluten Druck p_0. Damit die Luft aus dem Ruhezustand nach der Stelle 1 strömen kann, muß dort Unterdruck vorhanden sein. Der Eintritt sollte nach dem Eintrittsdreieck mit der wahren Geschwindigkeit w_1 erfolgen. Dies könnte aber nur durch besondere Leitbleche erzwungen werden. Für gewöhnlich kann für die beiden Komponenten v_1 und u_1 aus Symmetriegründen nur die Kanalgeschwindigkeit v_1 durch Unterdruck erzeugt werden. Es ist daher der Druck im Punkt 1

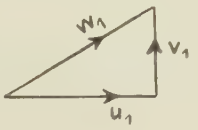


Fig. 36.

$$p_1 = p_0 - \gamma \frac{v_1^2}{2g}.$$

(Wenn Leitschaufeln vorhanden wären, wie z. B. bei Turbinen, ist

$$p_1 = p_0 - \gamma \frac{w_1^2}{2g}$$

zu setzen.) Die außerdem erforderliche tangentiale Bewegung (in Richtung von u_1) wird zunächst durch Reibung am Rotor eingeleitet, bis schließlich die eintretenden Teilchen durch Stoß auf die volle Umfangsgeschwindigkeit u_1 gebracht werden. Die genauere Verfolgung dieser Vorgänge ist schwierig und auch für die praktische Berechnung zu umständlich. Es soll daher einfach wegen des nicht stoßfreien Eintritts an der Eintrittsstelle noch ein Druckverlust

$$\zeta_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g}$$

gerechnet werden.

Um an der Stelle 2 die Geschwindigkeit v_2 zu erzeugen, wären zunächst für Beschleunigung gegenüber der Atmosphäre der Unterdruck

$$\gamma \frac{v_2^2}{2g}$$

erforderlich, so daß unter Berücksichtigung der Widerstände an der Eintrittsstelle und im Rotor der Druck an Stelle 2

$$p_2 = p_0 - (1 + \zeta_2)\gamma \frac{v_2^2}{2g} - \zeta_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g}$$

$$= p_0 - \xi_i \gamma \frac{v_2^2}{2g}.$$

Dabei enthält der Faktor $\zeta_i = 1 + \Sigma\zeta$ sowohl den Beschleunigungsdruck entsprechend der Geschwindigkeit v_2 als auch sämtliche von Stelle 0 bis Stelle 2 auftretenden Widerstände reduziert auf v_2; ζ_i ist durch Versuch zu bestimmen.

In Wirklichkeit stellt sich nicht der so berechnete Druck p_2 ein, da auf dem Wege von 1 — 2 Schleuderwirkung eintritt. Dabei wird

1. die Umfangsgeschwindigkeit eines Teilchens allmählich von u_1 und u_2 gesteigert,

2. durch Zentrifugalkraft eine Drucksteigerung hervorgerufen.

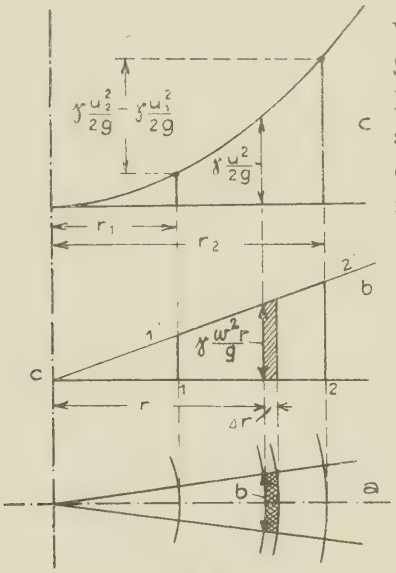


Fig. 36.

Denkt man sich auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe mit vertikaler Achse einen Körper von der Masse M mitbewegt, so erfährt er durch die Zentrifugalkraft den Antrieb $P = M\omega^2 r$. Ist der Körper radial frei beweglich, so setzt er sich in Bewegung und erfährt auf dem Wege von 1 — 2 fortwährend Beschleunigung. Er erreicht dabei schließlich die Geschwindigkeit v_2 im Punkt 2 und wird von hier mit der wahren Geschwindigkeit w_2, die sich aus den Komponenten v_2 und u_2 zusammensetzt, abgeschleudert. Der entsprechende Betrag an kinetischer Energie $\frac{M}{2} w_2^2$ muß daher vom Rotor geleistet und auf diesen von außen übertragen werden.

Wenn nun Flüssigkeit oder Luft durch den Rotor strömt, so kann ein beliebig herausgegriffenes Teilchen nicht in ähnlicher Weise dem Antrieb folgen, sondern muß mit den andern Teilchen die Bahn von 1 — 2 mit den vorgeschriebenen Geschwindigkeiten v_1 bis v_2 durchlaufen. Solange nun ein Teilchen keine Beschleunigung erfährt, muß die Zentrifugalkraft durch eine entsprechende Gegenkraft aufgehoben sein.

Es geschieht dies in der Weise, daß auf dem Wege 1 — 2 stetig eine Drucksteigerung auftritt. Die Arbeit durch Zentrifugalkraft besteht dann darin, daß die Luft gegen den größeren Druck p_2 im Punkt 2 getrieben wird. Greift man ein kleines Flüssigkeitsvolumen (s. Fig. 36) mit den Dimensionen b, Δr, 1, also mit der

Masse $M = \frac{\gamma b \Delta r \cdot 1}{g}$ heraus, so ist die darauf wirkende Zentrifugalkraft

$$P = M\omega^2 r = \frac{\gamma b \omega^2}{g} r \Delta r$$

und pro Flächeneinheit

$$p = \gamma \frac{\omega^2}{g} r \Delta r.$$

Die zwischen zwei Flächen im Abstand Δr vorhandene Druckzunahme ist daher durch den Inhalt der schraffierten Elementarfläche in Fig. 36b dargestellt, wenn man die Ordinaten $\gamma \frac{\omega^2}{g} r$ über r aufträgt. Durch Zusammensetzung mehrerer solcher Elementarstreifen ergibt sich, daß zwischen zwei beliebigen Punkten mit den Abständen r_1 und r_2 die Drucksteigerung gleich dem Inhalt der Fläche $1 2 2' 1'$ ist. Diese kann aufgefaßt werden als die Differenz der Dreiecke $C\,1\,1'$ und $C\,2\,2'$; der Inhalt eines solchen Dreieckes über der Abszisse r ist gleich:

$$\frac{1}{2} r \gamma \frac{\omega^2}{g} r = \gamma \frac{u^2}{2g}$$

($\omega r = u$), also als Funktion von u oder r eine Parabel. Es findet demnach zwischen den Punkten 1 und 2 die Drucksteigerung

$$p_r = \gamma \frac{u_2^2}{2g} - \gamma \frac{u_1^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 22)}$$

durch Schleuderwirkung statt.

Um diesen Betrag wird der ursprünglich für Punkt 2 berechnete Druck größer, so daß schließlich

$$\underline{p_2 - p_0 = \zeta_i \gamma \frac{v_2^2}{2g} + \gamma \frac{u_2^2}{2g} - \gamma \frac{u_1^2}{2g}} \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 23)}$$

wird.

Diese Gleichung kann als die Hauptgleichung des Rotors bezeichnet werden. Sie gibt den Zusammenhang zwischen dem erreichten Druck p_2 und der Geschwindigkeit v_2. Welche Werte von p_2 und v_2 sich tatsächlich einstellen, hängt von den Abflußbedingungen ab.

Der einfachste Fall ist der, daß der Rotor frei in die Luft ausbläst, wie z. B. an den Mantelverbindungen bei Gleichstromankern. Es muß dann der Druck an der Austrittsstelle gleich dem äußeren Atmosphärendruck, also $p_2 = p_0$ sein. Damit wird nach Gl. 23

$$\zeta_i v_2^2 = u_2^2 - u_1^2$$

oder

$$v_2 = \sqrt{\frac{u_2^2 - u_1^2}{\zeta_i}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 24)}$$

Im allgemeinen bläst der Rotor gegen den Stator, so daß im Punkt 2 Überdruck gegenüber der Atmosphäre eintritt. Es bestehen dann die Abflußbedingungen, daß erstens die Summe der in den Richtungen 3—4 und 3—5—6 abfließenden Luftmengen (vgl. Abb. 32, Seite 60) gleich der total vom Rotor geförderten Luftmenge sein muß, und daß zweitens der im Punkte 2 auftretende Überdruck zur Erzeugung der Abflußgeschwindigkeiten ausreichen muß.

An der Austrittsstelle 4 herrscht die Absolutgeschwindigkeit w_4, die sich aus den Komponenten u_4 in tangentialer und c_4 in axialer Richtung zusammensetzt. Die Komponente u_4 stellt sich ein, indem sich die im Punkte 2 vorhandene Umfangsgeschwindigkeit u_2 durch Reibung im Luftspalt allmählich bis u_4 verkleinert. In bezug auf die Axialkomponente c_4 ist zu bemerken, daß die Luft bereits im Punkte 2 die Kanalgeschwindigkeit v_2 besitzt, so daß in vielen Fällen keine oder nur geringe Beschleunigung bis zum Punkt 4 notwendig wäre. In Wirklichkeit ist jedoch beim Austritt der Luft aus dem Rotor wegen des plötzlichen Richtungswechsels und der damit verbundenen Drosselung ein ganz bedeutendes Druckgefälle erforderlich.

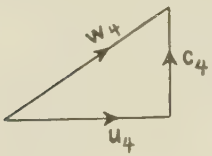


Fig. 37.

Für den Abschluß in der Richtung 3—5—6 kann die bereits vorhandene Geschwindigkeit v_2 nur nutzbar gemacht werden, wenn einem Rotorkanal gerade ein Statorkanal gegenübersteht; andernfalls wird sie vernichtet. Zugleich ist zu bemerken, daß vor dem Eintritt an Stelle 5 immer noch eine beträchtliche tangentiale Komponente u_5 vorhanden ist, die den stoßfreien Eintritt unmöglich macht. Es ist daher auch auf diesem Wege ein bedeutendes Druckgefälle erforderlich.

Die genauere Verfolgung dieser Vorgänge macht, ähnlich denen an der Eintrittsstelle 1, Schwierigkeiten Es sollen daher auch hier die einigermaßen zutreffenden Annahmen gemacht werden, daß das erforderliche Druckgefälle zur Erzeugung der Abflußkomponente c_4

$$p_2 - p_0 = \zeta_4 \gamma \frac{c_4^2}{2g} \quad \text{(Gl. 25a.)}$$

und für die radiale Komponente c_5

$$p_2 - p_0 = \zeta_5 \gamma \frac{c_5}{2g} \quad \text{(Gl. 25b.)}$$

gesetzt werden kann. Dabei sollen die Koeffizienten ζ_4 und ζ_5 sämtliche Widerstände und Beschleunigungsdrucke auf den Wegen 2—3—4 und 2—3—5—6 bis in die ruhende Atmosphäre (bezogen auf c_4 und c_5) enthalten.

Es empfiehlt sich Gl. 25b nicht mit ζ_6 und c_6, sondern mit ζ_5 und c_5 anzusetzen, da der weitaus größte Teil des Druckgefälles bis zur Stelle 5 verbraucht wird, und dementsprechend der für die Luftförderung in der Richtung 3—5—6 hauptsächlich maßgebende Querschnitt F_5 in der Schlußformel Gl. 27a erscheinen soll.

Nach der zweiten Abflußbedingung muß die Summe der an den Stellen 4 und 5 durchfließenden Luftmengen gleich der vom Rotor geförderten Luftmenge sein. Bezeichnet demnach F_2, F_4, F_5 die Kanalquerschnitte an den Stellen 2, 4, 5, so ist

$$F_2 v_2 = F_4 c_4 + F_5 c_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 26.)}$$

Eliminiert man hieraus mittels der Gleichungen 25a und 25b die zunächst noch unbekannten Geschwindigkeiten c_4 und c_5, so ergibt sich als Funktion von v_2 die für den Abfluß erforderliche Druckdifferenz

$$p_2 - p_0 = \zeta_a \gamma \frac{v_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 27)}$$

$$= 0{,}056\ \zeta_a v_2^2 \text{ in mm W. S.},$$

dabei ist

$$\zeta_a = \left(\frac{F_2}{\frac{F_4}{\sqrt{\zeta_4}} + \frac{F_5}{\sqrt{\zeta_5}}} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 27a)}$$

zu setzen und als Kombinationswiderstand für die Verzweigung 2—3—4 und 2—3—5—6 (bezogen auf v_2) aufzufassen.

Führt man den jetzt als bekannt anzusehenden Abflußdruck $p_2 - p_0$ in die Hauptgleichung 23 ein, so ergibt sich:

$$\gamma \frac{u_2^2}{2g} - \gamma \frac{u_1^2}{2g} = (\zeta_i + \zeta_a) \gamma \frac{v_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 28)}$$

Diese wichtige Gleichung sagt aus, daß die vom Rotor erzeugte nützliche Pressung (linke Seite) verbraucht wird, um die Summe der Widerstände (ζ_i = innerer Widerstand, ζ_a = äußerer Widerstand bezogen auf v_2) zu überwinden.

Daraus ergibt sich die gesuchte Geschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{\frac{u_2^2 - u_1^2}{\zeta_i + \zeta_a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 28a)}$$

Ferner wird nach den Gleichungen 25a, 26b und 27

$$c_4 = v_2 \cdot \sqrt{\frac{\zeta_a}{\zeta_4}} \quad \ldots\ldots \text{(Gl. 29a)}$$

und

$$c_5 = v_2 \cdot \sqrt{\frac{\zeta_a}{\zeta_5}} \quad \ldots\ldots \text{(Gl. 29b)}$$

Man kann also jetzt die mittleren Geschwindigkeiten in die Hauptströmungsrichtungen aus der Tourenzahl (Zahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit), den Dimensionen der Maschine und den Widerstandskoeffizienten berechnen.

Aus Gleichung 28a ergeben sich unmittelbar einige wichtige Folgerungen. Für eine bestimmte Maschine ist

$$u_1 = \text{const. } n \text{ und } u_2 = \text{const. } n$$

(n = Tourenzahl) und damit auch die Geschwindigkeit

$$v_2 = \text{const. } n$$

und die pro Zeiteinheit geförderte Luftmenge

$$V_2 = F_2 \cdot v_2 = \text{const. } n.$$

Ferner ist nach den Gleichungen 29a und 29b

$$c_4 = \text{const. } v_2, \text{ also auch } c_4 = \text{const. } n$$

und

$$c_5 = \text{const. } v_2, \text{ also auch } c_5 = \text{const. } n.$$

Es ergibt sich also der wichtige Satz:

Die Geschwindigkeiten in den Luftkanälen und die in der Zeiteinheit geförderte Luftmenge sind proportional der Tourenzahl.

Diese Proportionalität gilt, wie ohne theoretischen Beweis angegeben werden soll, allgemein für die Geschwindigkeit an jeder beliebigen Stelle der Maschine. Denkt man sich für jeden Punkt die Richtung und die Geschwindigkeit der Luftströmung bestimmt, so sind diese Strömungsbilder ähnlich, wenn man die Maschine mit verschiedenen Tourenzahlen betreibt. Die Richtung der Strömungen bleibt dieselbe, während sämtliche Geschwindigkeiten proportional der Tourenzahl sich ändern.

Außerdem ist nach Gl. 27

$$p_2 - p_0 = \text{const. } v_2^2 \text{ also auch} = \text{const. } n^2,$$

d. h. die auftretenden Druckdifferenzen sind proportional dem Quadrat der Tourenzahl, welcher Satz auch allgemein auf die zwischen zwei beliebigen Punkten bestehende Druckdifferenz ausgedehnt werden kann.

Nach Messungen an schnellaufenden Maschinen gelten diese Gesetze sehr genau bis zu den höchsten Umfangsgeschwindigkeiten ($u_2 \sim 100$ m/sek.).

Die zur Berechnung der Geschwindigkeiten erforderlichen Koeffizienten ζ_i, ζ_4, ζ_5 hängen sowohl vom Typus der Maschine als auch von den Einzelheiten der Ausführung ab. Um einigen Anhalt über deren Größe zu bekommen, wurden folgende Messungen ausgeführt.

Bei einer Innenpolmaschine normaler Konstruktion ähnlich Fig. 29 und 30 mit den Dimensionen:

Stator:	Rotor:
Innendurchmesser = 50 cm	8 Pole
Eisenlänge = 28 cm	Luftspalt zwischen Rotor und Stator = 0,75 cm
+ 2 Ventilationsschlitze à 10 mm	Zwischenraum zwischen 2 Polen $\cong$ 1,5 cm
48 Nuten à 20 × 40 mm	

also:

$F_2 = 8 \cdot 30 \cdot 1{,}5 = 360$ cm$^2 = 0{,}0360$ m^2;
$F_4 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}75 = 235$ cm$^2 = 0{,}0235$ m^2;
$F_5 = 2 \cdot 1 \cdot (\pi \cdot 50 - 48 \cdot 2{,}0) = 121$ cm$^2 = 0{,}0121$ m^2;

wurde bei $n = 750$ Touren/Min.
entsprechend $u_2 = 19$ m/sek., $u_1 = 7{,}6$ m/sek.
gemessen $c_4 = 6{,}5$ m/sek. $c_5 = 9{,}1$ m/sek
$p_2 - p_0 = 10{,}5$ mm W.S.,

daraus berechnet sich:

$$V_4 = 0{,}0235 \cdot 6{,}5 = 0{,}153 \text{ cbm/sek.}$$
$$V_5 = 0{,}0121 \cdot 9{,}1 = 0{,}110 \quad ,,$$
$$V_2 = V_4 + V_5 = 0{,}263 \text{ cbm/sek.}$$

$$c_2 = \frac{0{,}263}{0{,}0360} = 7{,}3 \text{ m/sek.}$$

Ferner wird nach Gleichung 27 : $\zeta_a = 3{,}5$
und „ „ 28a: $\zeta_i = 2{,}2$
und „ „ 29a: $\zeta_4 = 4{,}4$
„ „ 29b: $\zeta_5 = 2{,}3$

Bei einer Außenpolmaschine (schnellaufende Gleichstrommaschine) ähnlich Fig. 30 mit den Dimensionen:

Ankerdurchschnitt = 92 cm
Eisenlänge = 30 cm
5 Ventilationsschlitze à 10 mm im Eisen
2 Ventilationskanäle à 10 mm an beiden Stirnflächen

120 Nuten à 40 × 11 mm, Luftspalt 10 mm
6 Pole, 6 Wendepole, Abstand von Haupt- und Wendepolen (im Mittel) je 5 cm

entsprechend:

$$F_2 = (\pi 92 - 120 \cdot 1{,}1)\ (5 + 2) = 1100 \text{ cm}^2$$
$$F_4 = \pi \cdot 92 \cdot 2 \cdot 1{,}0 = 580 \text{ „}$$
$$F_5 = 6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 30 = 1800 \text{ „}$$

wurde bei $n = 1500$ U/Min.; $u_2 = 72$ m/sek., $u_1 = 36$ m/sek. gemessen: $V_2 = 2{,}0$ cbm/sek.

Außerdem kann nach Beobachtungen an vielen Gleichstrommaschinen

$$c_4 = 0 \text{ und } v_4 = 0$$

gesetzt werden, wenn in der üblichen Weise auch an den Enden des Ankerkörpers durch Stehbleche und die Spannplatten Luftschlitze gebildet werden. Es scheint, daß der aus denselben austretende kräftige Luftstrom ein axiales Entweichen der Luft unter den Polen verhindert.

Aus obigen Angaben ergibt sich:

$V_2 = 2$ cbm/sek.; $v_2 = V_2 : F_2 = 18{,}2$ m/sek.
$V_4 = 0$ $c_4 = 0$
$V_5 = V_2 - 2$ cbm/sek.; $c_5 = V_5 : F_5 = 11{,}1$ m/sek.

Nach Gl. 28a berechnet sich damit:

$$\zeta_i + \zeta_a = 11{,}8.$$

Für die Trennung von ζ_i und ζ_a reichen diese Angaben nicht aus. Da bei obiger Maschine relativ enge Eintrittslöcher im Anker vorhanden waren, kann schätzungsweise:

$\zeta_i = 6$ gesetzt werden. Es wird dann
$\zeta_a = 5{,}8$ und
$\zeta_5 = 15{,}5$.

Weitere Versuche in dieser Richtung sind daher sehr erwünscht. Die Berechnung der Koeffizienten auf theoretischem Wege erscheint nicht aussichtslos, überschreitet aber den Rahmen dieser Arbeit.

Berechnung der künstlichen Lüftung.

Die zu fördernde Luftmenge wird aus den Verlusten und aus den Dimensionen der Maschine bestimmt (Näheres siehe in dem Abschnitt über „Kühlung“ S. 92) und ist daher als gegeben zu betrachten. Es können daraus und aus den Kanalquerschnitten die in den Kanälen auftretenden Geschwindigkeiten ohne weiteres berechnet werden. Zu bestimmen ist der für die Bewegung der

Luft erforderliche Über- oder Unterdruck, da hierfür der Ventilator zu bemessen ist.

Bei der radialen Lüftung wirkt außer der z. B. von einem Ventilator erzeugten äußeren Pressung p_v auch noch die vom Rotor erzeugte Drucksteigerung, so daß die Summe als wirksame Druckdifferenz zur Erzeugung der Geschwindigkeiten aufgewendet wird. Es ist daher Gl. 28 zu ergänzen:

$$p_v + \gamma \frac{u_2^2}{2g} - \gamma \frac{u_1^2}{2g} = (\zeta_i + \zeta_a)\, \gamma \frac{v_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 30)}$$

und demnach der vom Ventilator zu erzeugende Druck

$$\underline{p_v = (\zeta_i + \zeta_a)\, \gamma \frac{v_2^2}{2g} - \gamma \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} \right)} \quad . \quad \text{(Gl. 30a)}$$

oder wenn p_v in mm W. S. $= h_v$ ist,

$$\underline{h = 0{,}056\, [(\zeta_i + \zeta_a)\, v_2^2 - u_2^2 + u_1^2].} \quad . \quad \text{(Gl. 30b)}$$

Es müßte demnach, um eine bestimmte Geschwindigkeit v_2 hervorzubringen, der vom Ventilator zu erzeugende Druck mit steigendem u_2 und u_1, also bei höherer Tourenzahl kleiner werden. Man beobachtet jedoch in Wirklichkeit oft, daß der für eine bestimmte Luftmenge erforderliche Druck mit der Tourenzahl steigt. Es erklärt sich dies daraus, daß die Widerstandskoeffizienten ζ_i und ζ_a von der Tourenzahl abhängen und damit steigen, da die Schwierigkeiten beim Eintritt in den Rotor und beim Übertritt vom Rotor in den Stator bei höherer Umfangsgeschwindigkeit größer sind.

So wurde z. B. an einer Maschine beobachtet:

Im Stillstand: $h_v = 20$ mm W. S. $\quad u_2 = 0 \quad v_2 = 4{,}2$ m/sek.
Im Lauf: $\quad h_v = 20$ mm W. S. $\quad u_2 = 9{,}4 \quad v_2 = 3{,}8$ m/sek.

Bei der axialen Lüftung strömt die Luft aus der gemeinsamen Druckkammer (s. Fig. 33) unabhängig in den Rotor und in den Stator. Auf jedem Wege wird der im Druckraum vorhandene Überdruck verbraucht, um die Luft auf die Kanalgeschwindigkeit v zu beschleunigen und die auftretenden Widerstände zu überwinden. Es muß also

$$p_v = \gamma \frac{v_2^2}{2g} (1 + \Sigma \zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 31)}$$

wenn v_2 die in den Rotor- oder Statorkanälen vorhandene Geschwindigkeit und $\Sigma \zeta$ die sämtlichen auf v_2 bezogenen Widerstände bezeichnet.

Die Widerstände bestehen in Reibung an den Wandungen, Kontraktion an den Mündungen der Kanäle je nach den Aus-

rundungen, Verengung der freien Querschnitte durch Wicklungsköpfe oder Konstruktionsteile. Hierzu kommen für den Rotor noch die Eintrittsschwierigkeiten, welche bei der natürlichen Lüftung in dem Widerstandskoeffizienten ζ_i berücksichtigt wurden. Es wird daher im allgemeinen im Stator eine größere Kanalgeschwindigkeit sich einstellen als im Rotor, und man muß durch passende Bemessung der Kanalquerschnitte oder Drosselung eine günstige Luftverteilung auf Stator und Rotor herbeiführen.

Einige Werte der Widerstandskoeffizienten sind auf Seite 73/74 angegeben. Nach Messungen an ausgeführten Maschinen sind die erforderlichen Drücke p_0, je nach der Intensität der Kühlung:

$h_v = 30 - 50$ mm W.S. bei normallaufenden $u_2 \sim 15$ m/sek.-Maschinen

$h_v = 50 - 100$ mm W.S. bei schnellaufenden $u_2 \sim 80$ m/sek.-Maschinen.

Nach Gleichung 30 ist auch

$$p_v = \text{const.}\ V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl 31a)}$$

zu setzen, d. h. der Druck steigt mit dem Quadrat der aufgewendeten Luftmenge.

3. Die Lüftungsarbeit und Eigenerwärmung der Luft.

Um der Luft in der Maschine Geschwindigkeit, also kinetische Energie zu erteilen und die durch Reibung und Stoß auftretenden Energieverluste zu decken, muß äußere Arbeit aufgewendet werden.

Bei der natürlichen Lüftung wird diese Arbeit vom Rotor geleistet. Nach den Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte ist der Rotor als unvollkommen wirkender Ventilator anzusehen, dessen Druckdifferenz verbraucht wird, um der Luft Geschwindigkeit zu erteilen und die Widerstände zu überwinden. Dafür muß an der Welle des Rotors mechanische Arbeit, die Betriebsarbeit des Ventilators, aufgewendet werden. Diese ist für die nutzbare Leistung der Maschine in Abzug zu bringen und wird daher vielfach als Luftreibungsverlust bezeichnet, worunter dann nicht nur die eigentliche Reibungsarbeit an den Wandungen, sondern die totale Lüftungsarbeit zu verstehen ist.

Die Berechnung der Lüftungsarbeit geschieht am einfachsten mittels des Flächensatzes*) (s. z. B. Föppl, Technische Mechanik, Bd. IV. Dynamik: Anwendung des Flächensatzes auf die Theorie der Turbinen).

*) Die Anregung zur Berechnung in dieser Form verdankt der Verfasser Herrn Professor Ossanna.

Darnach ist allgemein die von einem Turbinenrad pro Volumeneinheit der durchströmenden Flüssigkeit zu leistende Arbeit

$$L = \frac{\gamma}{g}(u_2\, w_2\, \cos\alpha_2 - u_1\, w_1\, \cos\alpha_1),$$

wenn α_2 und α_1 die Winkel sind, die w_2 mit u_2 bezw. w_1 mit u_1 einschließen.

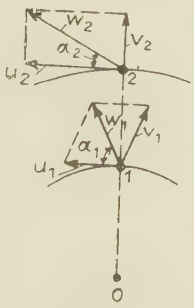


Fig. 38.

Es ist nun zu beachten, daß vom Rotor bereits für den Weg 0—1 Arbeit zu leisten ist, da ein Luftteilchen beim Eintritt im Punkt 1 die Geschwindigkeit u_1 bereits haben muß. Indem man nun den Flächensatz für die Wege 0—1 und 1—2 anwendet, erhält man für die Gesamtarbeit pro Volumeneinheit:

$$L_{1-2} = \frac{\gamma}{g}(u_2\, w_2 \cos\alpha_2 - u_1\, w_1 \cos\alpha_1)$$

$$L_{0-1} = \frac{\gamma}{g}(u_1\, w_1 \cos\alpha_1 - u_0\, w_0 \cos\alpha_0)$$

$$L_{0-2} = \frac{\gamma}{g}(u_2\, w_2 \cos\alpha_2 - u_0\, w_0 \cos\alpha_0).$$

Im vorliegenden Fall ist $w_2 \cos\alpha_2 = u_2$, da u_2 und v_2 senkrecht stehen, sowie $w_0 = 0$, so daß sich der einfache Ausdruck ergibt:

$$L_{0-2} = \gamma \frac{u_2^2}{g}.$$

Da hierin u_1 oder $\cos\alpha_1$ gar nicht mehr vorkommt, ergibt sich somit das interessante Resultat, daß die Art des Eintritts in den Rotor ganz ohne Einfluß ist. Ferner ist zu beachten, daß der abgeleitete Ausdruck streng gültig ist auch bei stoßweisem Eintritt und Wirbelung der Luft. Die pro Volumeneinheit treffende Rotorarbeit ist somit unabhängig vom Aufbau der Maschine (vgl. jedoch die einschränkenden Bemerkungen auf S. 80).

Die total vom Rotor zu leistende Lüftungsarbeit ist proportional der geförderten Luftmenge, also

$$W = V\gamma\frac{u_2^2}{g} \quad \ldots\ldots \text{(Gl. 32)}$$

oder $W = 1{,}1\; V u_2^2$ Watt

V in $\frac{\text{cbm}}{\text{sek.}}$; u_2 in $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$.

Die Lüftungsarbeit hängt daher insofern von der Ausführung der Maschine ab, als die Luftmenge V je nach den Widerständen verschieden ausfällt.

Da die geförderte Luftmenge proportional der Umfangsgeschwindigkeit (vgl. S. 72) ist, so wird

$$W = \text{const.}\, u_2^3 = \text{const.}\, n^3,$$

d. h. die Lüftungsarbeit steigt mit der dritten Potenz der Tourenzahl. Sie ist daher bei niedrigen Umfangsgeschwindigkeiten verschwindend, erreicht aber bei Schnelläufern mit 60 bis 100 m/sek. Umfangsgeschwindigkeit ganz beträchtliche Werte. So ergibt sich für die auf Seite 73 beschriebene Maschine mit:

$$V = 2{,}0\ \frac{\text{cbm}}{\text{sek.}} \text{ und } u_2 = 72\ \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$$

$$W = 1{,}1 \cdot 2 \cdot 72^2 = 11\,400 \text{ Watt.}$$

Je nach der Ausführung des Rotors findet auch außerhalb des Eisens durch die freien Querschnitte zwischen den Wicklungsköpfen Luftförderung statt. Die hierfür aufzuwendende Lüftungsarbeit ist in der genau gleichen Weise zu berechnen.

Außerdem werden auch durch die Unebenheiten der Oberfläche des Rotors die benachbarten Luftschichten in Bewegung versetzt, wie bereits auf Seite 55 näher ausgeführt wurde. Ein mit der Oberfläche in Berührung gelangendes Luftteilchen erhält Geschwindigkeit und damit kinetische Energie, die zum Teil durch Zusammenstoß mit anderen Teilchen, zum andern Teil bei der Bewegung nach außen in die ruhige Atmosphäre wieder verloren geht. Die genauere Verfolgung dieser Vorgänge stößt auf ziemliche Schwierigkeiten. Im allgemeinen ist der für die Oberflächenlüftung erforderliche Arbeitsbetrag im Vergleich zu dem für Innenlüftung durch besondere Kanäle klein.

Bei der künstlichen Lüftung ist die vom Ventilator zu leistende nutzbare Arbeit

$$W_v = p_v \cdot V,$$

wenn p_v die vom Ventilator aufzubringende dynamische Druckdifferenz und V die erforderliche Luftmenge ist.

Die an der Ventilatorwelle erforderliche Arbeit ist daher

$$W_v = \frac{p_v V}{\eta},$$

wobei η den Ventilatorwirkungsgrad bezeichnet.

Setzt man in den technisch üblichen Maßeinheiten:

$$p_v = h_v \text{ mm W.S.};\ V \text{ in } \frac{\text{cbm}}{\text{sek.}},$$

so ist der Effektbedarf: $W_v = \dfrac{h_v V}{\eta}\ \dfrac{\text{mkg}}{\text{sek.}}$ . . . . . (Gl. 33)

oder $$W_v = 9{,}81 \frac{h_v V}{\eta} \text{ Watt},$$

wobei $\eta = 0{,}4 - 0{,}5$ angenommen werden kann.

Da $$p_v = \text{const. } V^2$$

zu setzen ist, so ist auch

$$W_v = \text{const. } V^3,$$

d. h. die Lüftungsarbeit steigt mit der dritten Potenz der Kühlluftmenge.

Eigenerwärmung der Luft.

Von der aufgewendeten Lüftungsarbeit kommt nur ein Teil in Form von kinetischer Energie zum Vorschein, indem die Luft mit Geschwindigkeit aus der Maschine austritt; der andere Teil wird bereits in der Maschine durch Reibung, Stoß und plötzlichen Richtungswechsel in Wärme verwandelt. Es tritt daher auch bei rein mechanischem Leerlauf schon Erwärmung auf.

Der bis zur Austrittsstelle in Wärme verwandelte Teil der Lüftungsarbeit ergibt sich aus der Differenz der totalen Lüftungsarbeit und noch vorhandenen kinetischen Energie und ist daher pro 1 cbm gleich:

$$\gamma \frac{u_2^2}{g} - \gamma \frac{w_a^2}{2g} \text{ mkg}$$

(w_a = Austrittsgeschwindigkeit).

Erwärmt sich 1 cbm Luft um τ °C, so ist der Wärmeinhalt:

$$\gamma c \tau \text{ Kal.} = A \gamma c \tau \text{ mkg},$$

wobei c die spez. Wärme und A das mechanische Wärmeäquivalent bezeichnet.

Durch Gleichsetzen beider Beträge ergibt sich

$$\tau = \frac{2u^2 - w_a^2}{2Agc} \text{ °C} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 34)}$$

und mit $c = 0{,}24 \frac{\text{Kal.}}{\text{kg °C}}$, $A = 427 \frac{\text{mkg}}{\text{Kal.}}$, $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sek.}^2}$

$$\tau = \frac{2u_2^2 - w_a^2}{2010} \text{ °C},$$

wenn u_2 und w_a in $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$ eingesetzt.

Da die Geschwindigkeiten u_2 und w_a einander proportional sind, steigt allgemein die Temperaturzunahme mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit.

In vielen Fällen ist w_a^2 klein gegen u_2^2, so daß bei Vernachlässigung die maximal mögliche Erwärmung

$$\tau = \frac{u_2^2}{1020}\ ^0\mathrm{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 34a)}$$

wird, wobei u_2 in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek.}}$ einzusetzen ist; in Fig. 37 ist τ in Abhängigkeit von u_2 graphisch dargestellt (Parabel).

Es ist noch zu bemerken, daß die hier gegebene Berechnung der Lüftungsarbeit und Eigenerwärmung der Luft nur unter der Voraussetzung gilt, daß die Luft in der idealisierten Weise nach Fig. 32 strömt, daß also ein Luftteilchen den Rotor und den Stator durchströmt und dann sofort die Maschine verläßt. Wenn jedoch das freie Abströmen der Luft im Punkt 4 z. B. durch Seitenschilder gehindert ist, gelangt ein beträchtlicher Teil wieder direkt in den Rotor beim Punkt 1 und führt so einen fortwährenden Kreislauf innerhalb der Maschine aus.

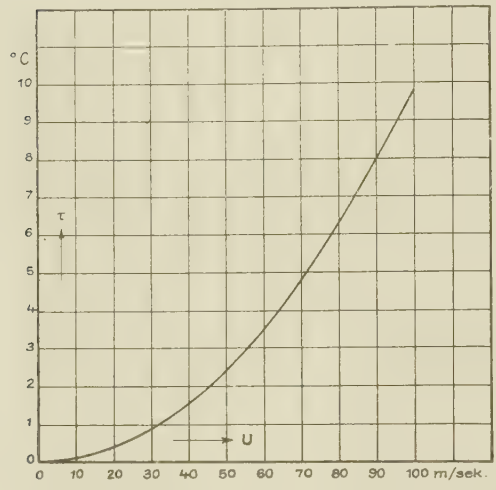


Fig. 37. Eigenerwärmung der Luft abhängig von der Ankerumfangsgeschwindigkeit.

Dies macht sich in zweierlei Weise bemerkbar. Erstens ist die nach Gl 32 berechnete Lüftungsarbeit zu klein, wenn man für V die außen in der Frischluft- oder Abluftströmung meßbare Luftmenge einsetzt. Denn der Rotor fördert in Wirklichkeit eine viel größere Luftmenge. Zweitens ist die Eigenerwärmung der Luft eine höhere als nach Gl. 34a. Denn die Lüftungsarbeit für die innerhalb der Maschine kreisende Luft wird ebenfalls in Wärme umgesetzt, welche von der Abluft fortgeführt werden muß. Wenn daher die Lüftungsarbeit oder die Eigenerwärmung der Luft größer ist, als aus den Gleichungen 32 bezw. 34a sich ergibt, so ist dies ein Zeichen dafür, daß die Luftführung der Maschine mangelhaft ist.

Abschnitt II.

Kühlung elektrischer Maschinen.

1. Gegenseitige Erwärmung der wärmeproduzierenden Teile und lineare Superposition der Temperaturen.

Bei den Erwärmungsrechnungen für elektrische Maschinen wird meistens die Frage so gestellt: In einem Teil der Maschine, z. B. in der Magnetwicklung einer Gleichstrommaschine, wird eine bestimmte Wärmemenge produziert; welche Temperaturzunahme tritt in diesem Teil auf?

Es ist aber zu bemerken, daß in Wirklichkeit die Aufgabe nicht sofort in dieser einfachen Form vorliegt; denn gleichzeitig wird auch in anderen Teilen der Maschine, z. B. im Anker, in den Wendepolwicklungen usw., Wärme entwickelt, so daß an der Maschine eine Reihe von Wärmequellen wirksam sind. Da zwischen diesen sowohl durch Strahlung als auch durch Leitung in den festen Teilen und durch Luft Wärmebewegung möglich ist, hängt die Temperaturerhöhung eines bestimmten Teils auch von der an anderen Stellen entwickelten Wärme ab.

So rührt z. B. bei Außenpolmaschinen die Erwärmung der Magnetwicklung nicht nur von der darin entwickelten Stromwärme, sondern auch von der im Anker produzierten Wärme her, indem die warme Ankerluft die Magnetpole bestreicht. Umgekehrt gelangt bei Innenpolmaschinen ein Teil der im Magnetrad entwickelten Stromwärme mit der in Bewegung befindlichen Luft in die Kanäle des Stators. Auch innerhalb eines Teiles selbst findet eine solche Beeinflussung statt, da z. B. im Anker die Erwärmung der Wicklung nicht nur von der Stromwärme im Kupfer, sondern auch von der in den Eisenpaketen entwickelten Wärme abhängt, dadurch, daß Wärme vom Kupfer ins Eisen oder umgekehrt vom Eisen ins Kupfer übergehen kann.

Die Ermittlung der unter der gegenseitigen Beeinflussung sich schließlich einstellenden Wärmeflüsse wäre in den meisten Fällen eine sehr schwierige Aufgabe. Man gelangt jedoch auf verhältnismäßig einfachem Wege zu der praktisch doch immer vorliegenden Frage, welche Temperaturerhöhung tritt an einer bestimmten Stelle ein. Wie später an einigen Beispielen gezeigt wird, kann nämlich die resultierende Temperaturverteilung durch Übereinanderlagerung der je nur für eine Wärmequelle sich einstellenden Übertemperaturen berechnet werden.

Lineare Superposition der Einzelerwärmungen.

Denkt man sich der Einfachheit wegen zunächst nur zwei Körper *A* und B, welche so gelagert sein sollen, daß zwischen beiden Wärmebewegung möglich ist. Wird nun zuerst im Körper *A* allein Wärme entwickelt, so erreicht er nach einiger Zeit eine bestimmte Übertemperatur, die man als Temperaturzunahme durch Eigenerwärmung bezeichnen kann. Aber auch an dem Körper *B* wird sich, obwohl in ihm keine Wärmeentwicklung stattfindet, eine gewisse Übertemperatur einstellen dadurch, daß Wärme vom Körper *A* herüberströmt. Es soll dies als Temperaturzunahme durch Anwärmung bezeichnet werden. Ganz analog stellt sich, wenn nur im Körper *B* Wärme produziert wird, in diesem eine gewisse Übertemperatur durch Eigenerwärmung ein, während im Körper *A* Temperaturerhöhung nur durch Anwärmung hervorgerufen wird. Wenn nun gleichzeitig in beiden Körpern die Wärmequellen in ihrer früheren Stärke wirksam sind, so nehmen die Wärmeströme einen anderen Verlauf, wie wenn nur in dem einen oder in dem anderen Körper Wärmeentwicklung stattfindet; für die an jedem der Körper auftretende Übertemperatur besteht aber mit den im Folgenden noch angegebenen Beschränkungen die einfache Beziehung, daß die resultierende Temperaturzunahme gleich ist der Temperaturzunahme durch Eigenerwärmung plus der Temperaturzunahme durch Anwärmung.

Man beachtet z. B. am Körper *A* die Temperaturzunahme einmal, wenn nur im Körper *A* Wärme produziert wird, dann die Temperaturzunahme dieses Körpers, wenn nur im Körper *B* Wärme entwickelt wird, und addiert schließlich beide Werte.

Dieser Satz kann auf eine beliebige Zahl von Körpern, zwischen welchen Wärmeaustausch möglich ist, ausgedehnt werden. Die resultierende Temperaturzunahme an irgend einem dieser Körper ist gleich der Temperaturzunahme, hervorgerufen durch die eigene Wärmequelle, plus der Summe der Temperaturzunahme, herrührend von der Anwärmung durch die in allen übrigen Körpern wirksamen Wärmequellen. Man kann beide Beträge bestimmen, indem man an einem Körper *X* erst die Temperaturzunahme beobachtet, wenn nur in diesem Körper Wärme entwickelt wird, und dann die Übertemperatur feststellt, wenn im Körper *X* keine Wärmeentwicklung stattfindet, dagegen die Wärmequellen in sämtlichen anderen Körpern wirksam sind.

Die Richtigkeit des Superpositionsgesetzes und dessen Geltungsbereich ergeben sich aus folgenden Überlegungen. Es seien zunächst nur zwei Körper I und II mit den Wärmequellen von der Ergiebigkeit W_1 bezw. W_2 (entwickelte Wärmemenge pro Zeiteinheit) vorhanden. Wirkt nur die Wärmequelle W_1, so erreicht der Körper I, an welchem das Superpositionsgesetz studiert werden soll, schließlich die Temperatur τ_{11} (der erste Index bezieht sich auf den Körper, der zweite auf die Wärmequelle), also gegenüber der Umgebung die Temperaturdifferenz $(\tau_{11} - \tau_0)$. Es soll jetzt die Wärmequelle W_1 erlöschen und Wärmequelle W_2 wirksam werden; dann stellt sich am Körper I durch Anwärmung die Temperatur τ_{12} ein. Dies kann nur dadurch geschehen, daß die Temperatur der Lufthülle, in welcher Körper I sich befindet, allmählich steigt und Wärme in den Körper I eindringt, bis beide die Temperatur τ_{12} haben. Die Wirkung der Wärmequelle W_2 hat also darin bestanden, für den Körper I die Umgebungstemperatur von τ_0 auf τ_{12} zu steigern. Wenn jetzt auch die Wärmequelle W_1 wirksam wird (W_2 ist bereits in Tätigkeit), so wird sich die Eigenerwärmung des Körpers I gewissermaßen über dem Temperaturniveau τ_{12} abspielen. Von der Temperatur τ_{12} ausgehend erreicht der Körper I schließlich die Endtemperatur τ, also gegenüber dem Temperaturniveau τ_{12} die Temperaturdifferenz $(\tau - \tau_{12})$. Wenn nun die Wärmeabgabe derart erfolgt, daß nur die Temperaturdifferenz maßgebend ist, daß also z. B. der Körper I bei 30° C Körpertemperatur und 20° C Raumtemperatur die gleiche Wärme abgibt, wie bei 70° C Körpertemperatur und 60° C Raumtemperatur, so muß die Eigenerwärmung $(\tau_{11} - \tau_0)$ gleich der Eigenerwärmung $(\tau - \tau_{12})$ sein. Dementsprechend wird die Gesamterwärmung über der Umgebungstemperatur τ_0 gleich

$$(\tau - \tau_{12}) + (\tau_{12} - \tau_0) \quad = \quad (\tau_{11} - \tau_0) \quad + \quad (\tau_{12} - \tau_0)$$

Gesamterwärmung $(\tau - \tau_0)$ = Eigenerwärmung + Anwärmung.

Diese Gleichung läßt sich auch auf mehrere Körper ausdehnen. Denn analog der Wärmequelle W_2 wird die Wärmequelle W_3 den Betrag $(\tau_{13} - \tau_0)$, die Wärmequelle W_n den Betrag $(\tau_{1n} - \tau_0)$ zur Anwärmung beitragen. Die gesamte Erwärmung ist daher zu berechnen in der Form:

$$\tau - \tau_0 = (\tau_{11} - \tau_0) + (\tau_{12} - \tau_0) + (\tau_{13} - \tau_0) \ldots\ldots (\tau_{1n} - \tau_0) \quad \text{(Gl. 35)}.$$

Ebenso wie für den Körper I läßt sich diese Gleichung auch für jeden der anderen Körper II bis n anschreiben.

Die im Folgenden angeführten Versuche zeigen unmittelbar, daß das Superpositionsgesetz in Wirklichkeit genügend genau erfüllt ist.

Versuche an einer 7,5 K.W.-Gleichstrommaschine.*)

Die Maschine hat einen Nutenanker ohne Luftschlitze (Ankerdurchmesser = 22 cm, Ankereisenlänge = 18,5 cm) sowie Wendepole und Kompensationswicklung.

Es wurde erst nur je ein Teil der Maschine (Anker- oder Magnet- oder Kompensations- und Wendepolwicklung) belastet und dann gleichzeitig sämtliche Teile belastet. Die Versuche wurden bei ruhendem und auch bei laufendem Anker ausgeführt.

a) Anker stillstehend.

Th = Temperaturzunahme mittels Thermometer bestimmt,
W = „ aus der Widerstandszunahme berechnet.

Art der Belastung.	Temperaturzunahmen						
	Anker	Magnetwicklung		Wendepolwicklung		Kompensationswicklung	
	W^0 C	Th^0 C	W^0 C	Th^0 C	W^0 C	Th^0 C	W^0 C
Nur Anker belastet . . .	54,6	8,5	7,3	8,6	11,0	9,0	13,2
Nur Magnete belastet . .	4,4	64,5	88 5	11,5	9.3	12,2	15,2
Nur Wendepole und Kompensation belastet . . .	3,7	6,9	7,1	9,5	13,8	19,3	24,9
Berechnete Summe . . .	62,7	79,9	102,9	29,6	34,1	40,5	53,3
Alle Teile belastet . . .	60,6	76,8	102,9	30,5	31,8	38.8	49,9
Differenz	+2,1	+3.1	0	−0,9	+2,3	+1,7	+3.9

b) Anker laufend.

Ankerumfangsgeschwindigkeit = 20 $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$.

Art der Belastung.	Temperaturzunahmen						
	Anker	Magnetwicklung		Wendepolwicklung		Kompensationswicklung	
	W^0 C	Th^0 C	W^0 C	Th^0 C	W^0 C	Th^0 C	W^0 C
Leerlauf	17,3	39,0	71,0	10,0	13,0	8,0	15,2
Kurzschluß	51,2	23,0	22,3	26,7	39,2	48,0	59,7
Berechnete Summe . . .	68,5	62,0	93,9	36,7	52,2	56,0	74,9
Vollast	66,0	58,5	92,0	33,3	54,7	57,0	76,3
Differenz	+2,5	+3,5	−1,3	+3,4	−2,5	−1,0	−1,4

Bemerkung: Die angegebenen Temperaturen sind immer Mittelwerte aus mehreren Versuchen. Dabei traten bei den gleichen Versuchen Ab-

*) Ausgeführt im Versuchsfeld der Siemens-Schuckert-Werke (1908) von Ingenieur H. Brühn.

weichungen bis zu 5° C auf, vermutlich verursacht durch die wechselnden Luftströmungen in der Umgebung der Maschine. Insbesondere bei stillstehendem Anker machte sich dieser Einfluß bemerkbar.

Wie bereits bemerkt (Seite 83), ist das Superpositionsgesetz nur gültig, wenn für den Wärmeaustausch der Körper nur die Temperaturdifferenz maßgebend ist. Es ist dies gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die Glieder der Gl. 35

$$(\tau_{11} - \tau_0) = C_1 W_1$$
$$(\tau_{12} - \tau_0) = C_2 W_2$$
$$(\tau_{13} - \tau_0) = C_3 W_3$$
$$(\tau_{1n} - \tau_0) = C_n W_n$$

gesetzt werden können. Damit erhält Gl. 35 die Form:

$$\tau - \tau_0 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + C_3 W_3 \ldots + C_n W_n \quad \text{(Gl. 35a)}.$$

Die Konstanten C_1, C_2, C_3, ... C_n sind von der Form und den Dimensionen der Körper und von den Wärmeabgabeverhältnissen abhängig. Sie können leicht experimentell bestimmt werden, indem man eine Reihe von Erwärmungsversuchen ausführt, bei welchen möglichst nur in je einem Teil Wärme entwickelt wird, z. B. Leerlaufversuch, Kurzschlußversuch, Leerlaufversuch mit Gegenschaltung der Magnete. Indem man nun auf jeden Versuch Gl. 35 anwendet, erhält man ein System von linearen Gleichungen, aus welchen die Konstanten berechnet werden können.

Im Folgenden ist eine derartige Konstantenbestimmung für einen Einphasentransformator durchgeführt.

Versuche an einem 300 K.W.-Transformator.*)

Es wurden sieben Versuche, bei welchen das Verhältnis von Eisen- zu Kupferverlusten immer verschieden war, ausgeführt und dabei folgende Erwärmungen gemessen:

Normale Spannung = 1 gesetzt,
Normaler Strom = 1 gesetzt.

Zur Bestimmung der Außentemperatur der Wicklungen war nur ein Thermometer zwischen der dünnen und der dicken Wicklung angebracht, weshalb in der Tabelle für beide der gleiche Wert angegeben ist.

---

*) Diese Versuche wurden bereits im Jahre 1899 im Versuchsfeld von Siemens-Halske ausgeführt zum Nachweis des Superpositionsgesetzes.

Nr.	Belastung		Verluste		Temperaturzunahmen				
	Spannung	Strom	Eisen-KW.	Kupfer-KW.	Eisen	Dünne Wicklung		Dicke Wicklung	
					Th^0 C	Th^0 C	W^0 C	Th^0 C	W^0 C
I	1	1	4,59	3,22	91,7	63,4	66,5	63,4	72,5
II	1	$^2/_3$	4,64	1,31	81,0	41.0	38,5	41,0	52,5
III	1	$^1/_3$	4,67	0,31	76,3	26,6	25,0	26,6	35,5
IV	1	0	4,70	0	73,5	19,9	12,0	19 9	29,5
V	0	1	0	3,06	17,6	44,7	58,5	44,7	51,5
VI	$^1/_3$	1	0,80	3 10	33,0	50,0	60,5	50,0	55,0
VII	$^2/_3$	1	2,26	3,14	57,0	53,0	61,0	53,0	61,5

Zur Bestimmung der Konstanten hätten schon je zwei dieser Versuche genügt; um jedoch Beobachtungsfehler und äußere Einflüsse möglichst zu eliminieren, wurde die Zahl der Versuche vermehrt. Da hierdurch die Konstanten überbestimmt werden, erfolgte die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ohne auf die Berechnung näher einzugehen, seien im folgenden nur die Resultate wiedergegeben.

Es ist demnach:

Temperaturzunahme

des Eisens $(Th\,^0C) = 15{,}8 \times$ Eisenverlust (in KW.)
$+ 6{,}3 \times$ Kupferverlust „ „

der dünnen Wicklung $(Th\,^0C)$ } $= 4{,}4 \times$ Eisenverlust „ „
der dicken Wicklung $(Th\,^0C)$ } $+ 14{,}3 \times$ Kupferverlust „ „

der dünnen Wicklung $(W\,^0C) = 2{,}9 \times$ Eisenverlust „ „
$+ 18{,}1 \times$ Kupferverlust „ „

der dicken Wicklung $(W\,^0C) = 6{,}2 \times$ Eisenverlust „ „
$+ 15{,}5 \times$ Kupferverlust „ „

Im Folgenden sollen nun die nach diesen Formeln zu berechnenden Temperaturen mit den tatsächlich beobachteten verglichen werden (vgl. Tabelle auf der nächsten Seite).

Bei der Beurteilung der auftretenden Differenzen ist auch hier zu beachten, daß sich bei Temperaturmessungen keine große Genauigkeit erreichen läßt. Zum Teil sind die Abweichungen begründet, da die Voraussetzungen des Superpositionsgesetzes doch nicht ganz erfüllt sind. Die Temperaturzunahme ist nicht genau proportional der Wärmemenge, sondern etwas kleiner, so daß die beobachteten Temperaturen meistens etwas unter den berechneten liegen. Für praktische Bedürfnisse kann man diese Abweichungen wohl immer vernachlässigen und daher das Superpositionsgesetz als erfüllt ansehen.

Versuch Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII
Erwärmung des Eisens (Th °C).							
Berechnet	92,5	81,4	75,6	74,1	19,1	32,0	55,2
Beobachtet	91,7	81,0	76,3	73,5	17,6	33,0	57,0
Differenz	+0,8	+0,4	−0,7	+0,6	+1,5	−1	−1,8
Erwärmung der dünnen und der dicken Wicklung (Th °C).							
Berechnet	66,2	39,1	25,1	20,8	43,6	47,7	54,8
Beobachtet	63,4	41,0	26,6	19,9	44,7	50,0	53,0
Differenz	+2,8	+1,9	−1,5	+0,9	−1,1	−2,3	+1,8
Erwärmung der dünnen Wicklung (W °C).							
Berechnet	71,4	37,1	19,2	13,6	55,2	58,3	63,2
Beobachtet	66,5	38,5	25,0	12,0	58,5	60,5	61,0
Differenz	+4,9	−1,4	−5,8	+1,6	−3,3	−2,2	+2,2
Erwärmung der dicken Wicklung (W °C).							
Berechnet	78,3	48,6	33,7	29,0	47,5	53,0	62,5
Beobachtet	72,5	52,5	35,5	29,5	51,5	55,0	61,5
Differenz	+5,8	−3,9	−1,8	−0,5	−4,0	−2,0	+1,0

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. Um die Übertemperatur eines bestimmten Teiles der Maschine zu berechnen, nimmt man erst an, daß nur in diesem Teile Wärme produziert wird und untersucht dann, wieviel jeder der übrigen Teile für sich allein den erstbetrachteten Teil zu erwärmen vermag. Man erhält dadurch eine Reihe einfacher und meistens leichter lösbarer Aufgaben. So wäre z. B. schwer direkt zu übersehen, wie bei Außenpolmaschinen die Magnetwicklung durch die vom Anker geschleuderte Luft gekühlt wird; denn die Ankerluft ist bereits stark erwärmt, bis sie mit der Magnetoberfläche in Berührung kommt. Es kann daher die Kühlwirkung der Ankerluft unter Umständen sehr gering sein. Die Untersuchung dieses Einflusses wird wesentlich erleichtert, wenn man nach dem Superpositionsgesetz erst annimmt, daß die Ankerluft nach dem Verlassen des Ankers noch die Temperatur der Umgebung habe (Anker ohne Wärmeproduktion), und dann betrachtet, in welcher Weise die stromlosen Magnete (Magnetwicklung ohne Wärmeproduktion) durch die Ankerluft erwärmt werden, wenn diese beim Austritt aus dem Anker bereits die Übertemperatur wie bei Vollast hat.

Das Superpositionsgesetz läßt sich mit Vorteil bei der Probe großer Maschinen, welche im Prüffeld nicht vollbelastet werden können, verwenden. Da die Verluste bei Vollast annähernd gleich

der Summe der Verluste bei Leerlauf und bei Kurzschluß sind, führt man Erwärmungsproben bei Leerlauf und bei Kurzschluß aus und addiert die dabei erhaltenen Temperaturzunahmen.

Auf Grund des Superpositionsgesetzes gelangt man also zu der vereinfachten Aufgabe, welche Temperaturzunahmen treten auf, wenn nur in einem Teil Wärme entwickelt wird. Wie bereits eingangs erwähnt, ist hierbei das innere Temperaturgefälle vom Innern der Wicklungen oder des Eisens bis zur Oberfläche und das äußere Temperaturgefälle von der Oberfläche dieser Teile bis zur umgebenden Luft zu unterscheiden.

Die folgenden Untersuchungen sollen sich ausschließlich auf das äußere Temperaturgefälle erstrecken. Als Grundlage hierfür werden zunächst die Ergebnisse des I. Teils „Über äußere Wärmeleitung“ kurz wiedergegeben.

2. Grundsätze für den Wärmeübergang auf ruhende oder bewegte Luft.

Die Wärmeabgabe eines festen Körpers kann durch zwei grundsätzlich verschiedene Vorgänge erfolgen:

a) Strahlung.

Ein Körper von der Oberfläche F (in m^2), der Oberflächentemperatur τ (^{0} C) strahlt in einem Raum von der Temperatur τ_0 in der Zeiteinheit (Sek.) die Wärmemenge ab:

$$Q = eF\,(\tau - \tau_0) \text{ Watt} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 36)}$$

dabei ist e die spez. Wärmeabgabefähigkeit durch Strahlung und zu berechnen in der Form (gültig für den Temperaturbereich $0-100^0$):

$$e = 4{,}35\,\nu\,(1 + 0{,}012\,\tau_0)\,(1 + 0{,}0062\,(\tau - \tau_0))\ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\,^0\text{C}} \quad \text{(Gl. 36a)}$$

Es hängt demnach die spez. Wärmeabgabefähigkeit e sowohl von der Raumtemperatur als auch wieder von der Temperaturdifferenz ab.

Der Faktor ν berücksichtigt den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit und ist für eine Reihe von Körpern in der folgenden Tabelle nach den Versuchen von Wamsler (s. S. 11) angegeben.

Material	ν	Material	ν
Poliertes Kupfer	0,17	Schmiedeeisen, matt . . .	0,95
Zink, matt	0,21	Gußeisen, rauh	0,97
Messing matt, ...	0,23	Kalkmörtel	0,93
Schmiedeeisen, hochpoliert .	0,29	Kienruß	0,96
		Absolut schwarzer Körper .	1

Man hat demnach zwei Hauptgruppen zu unterscheiden: Erstens Körper mit rauher Oberfläche, diese besitzen ein großes Strahlungsvermögen; zweitens Körper mit polierter Oberfläche, bei diesen ist das Strahlungsvermögen sehr klein und beträgt etwa $^1/_5$ von demjenigen der rauhen Körper.

Für die häufig vorkommenden Werte:

$\tau_0 = 15^0$ C; $\tau = 50^0$ C, also $\tau - \tau_0 = 35^0$ C und

$\nu = 0{,}92$ wird z. B.

$$e = 4{,}35 \cdot 0{,}92\ (1 + 0{,}012 \cdot 15)\ (1 + 0{,}0062 \cdot 35) = 5{,}8\ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\,^0\text{C}}.$$

Es ist zu bemerken, daß der Vorgang bei der Wärmestrahlung im Wesen gleich ist dem bei der Lichtstrahlung und daß für beide ganz gleiche Gesetze gelten. Die Ausbreitung der Wärme erfolgt dabei von einem beliebigen Punkt der Oberfläche aus geradlinig nach allen Richtungen des Raumes, so daß man ebenso von Wärmestrahlen wie von Lichtstrahlen spricht. Treffen Wärmestrahlen auf einen blanken Körper, so werden sie zurückgeworfen oder reflektiert. Die Berechnung der abgestrahlten Wärmemenge in der oben angegebenen Weise ist daher nur dann richtig, wenn der Körper frei im Raum strahlt oder die Körper der Umgebung nicht reflektieren.

b) Leitung und Konvektion.

Ebenso wie feste Körper oder wie Flüssigkeiten hat auch die Luft ein inneres Wärmeleitungsvermögen. Wenn also z. B. ein fester Körper an eine Luftmasse grenzt, so kann zwischen beiden in ganz ähnlicher Weise Wärme übergehen, wie wenn zwei feste Körper sich vollkommen dicht berühren. Auf dem Wege vom Innern des Körpers durch die Oberfläche in die Luftmasse hinein fällt die Temperatur stetig, ohne daß, wie man vielfach annimmt, in der Berührungsfläche zwischen Körper und Luft ein Temperatursprung auftritt. Dies gilt auch noch, wie ausdrücklich zu bemerken ist, wenn die Luft gegenüber dem Körper nicht mehr in Ruhe ist, sondern an der Oberfläche entlang streicht. Der Wärmeübergang auf die unmittelbar berührenden Schichten erfolgt ähnlich, wie wenn zwei feste Körper mit ebener Fläche dicht aneinander gleiten, ohne daß wegen der Bewegung ein besonderes Temperaturgefälle in der Berührungsfläche erforderlich wäre. Indessen ist es nicht mehr zulässig, für das weitere Vordringen der Wärme, nach dem Übergang von der Körperoberfläche auf die unmittelbar berührenden Luftschichten, nur reine Leitung wie in

einem festen Körper anzunehmen; denn wegen der leichten Beweglichkeit der Luftteilchen treten hier besondere Erscheinungen auf.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Wärmeübergang auf ruhige Luft.

Es geht zunächst durch eine reine Leitung Wärme von der Körperoberfläche auf die unmittelbar berührenden Luftschichten über. Die erwärmten Teilchen werden leichter und steigen durch Auftrieb in die Höhe. Da zum Ersatz andere Teilchen an deren Stelle treten müssen, bildet sich schließlich in der Luftmasse eine stationäre Luftströmung aus, trotzdem ein äußerer Antrieb fehlt (Kaminwirkung). Dabei gelangen immer wieder neue Teilchen mit der Körperoberfläche in Berührung und tritt eine verhältnismäßig gute Wärmeabfuhr durch den aufsteigenden Luftstrom ein. Man bezeichnet diesen Vorgang als natürliche Konvektion. Die Konvektion ist Ursache, daß eine scheinbar ruhende Luftmasse der Wärmeausbreitung tatsächlich keinen so großen Widerstand entgegensetzt, als ihrem geringen inneren Leitvermögen entspricht.

Für die Wärmeabgabe eines Körpers durch Konvektion haben sich sowohl auf theoretischem als auch experimentellem Wege folgende Gesetze ergeben:

1. Im Gegensatz zur Strahlung ist die Konvektion ziemlich unabhängig von der Oberflächenbeschaffenheit.

2. Die abgegebene Wärmemenge steigt schneller als proportional der Temperaturdifferenz und zwar etwa mit $(\tau - \tau_0)^{5/4}$; für den hier interessierenden Temperaturbereich von $25 - 80^0$ C kann dafür auch die bequemere Form: $(\tau - \tau_0)\,(1 + 0{,}0075\,(\tau - \tau_0))$ gebraucht werden.

3. Die Konvektion ist ziemlich unabhängig von der Raumtemperatur.

Es ist zu beachten, daß der an einem warmen Körper aufsteigende Luftstrom nicht alle Stellen der Oberfläche gleichmäßig kühlen kann; denn die weiter oben liegenden Flächenteilchen kommen immer nur mit bereits angewärmter Luft in Berührung. Die pro Flächenelement abgegebene Wärmemenge wird daher von der Lage des Flächenelements abhängen und in weiten Grenzen sich ändern.

Für technische Zwecke genügt meistens die Kenntnis der von der ganzen Oberfläche abgegebenen Wärmemenge. Zur Berechnung derselben kann man setzen:

$$Q = \alpha_m \cdot F\,(\tau - \tau_0) \text{ Watt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 37)}$$

wobei F = Gesamtoberfläche in m^2 und $\tau - \tau_0$ die Temperaturdifferenz in ^0C bezeichnet. Die Konstante α_m ist dann ein Mittelwert aus den verschiedenen Wärmeübergangszahlen aller Stellen und daher auch keine physikalische Konstante wie etwa e bei der Strahlung.

Die mittlere spez. Wärmeabgabefähigkeit α_m hängt sowohl von der Form als auch der Größe des Körpers und von der Temperaturdifferenz ab. Wie der Verfasser auf theoretischem Wege gefunden hat, sollte bei Körpern von ähnlicher Form α_m annähernd mit der reziproken vierten Wurzel aus den Dimensionen, also wie $\sqrt[4]{D_2} : \sqrt[4]{D_1}$ sich ändern. Dieses Gesetz wird auch durch Péclet[11], welcher die Konvektion verschiedener Körper in einem abgeschlossenen Hohlraum untersuchte, annähernd bestätigt. Dagegen ist der dabei gefundene Absolutwert von α_m viel zu klein (unter der Hälfte) gegenüber den Werten, welche bei Versuchen über die Wärmeabgabe von gekapselten Elektromotoren sich ergeben haben. Vermutlich beruht dies darauf, daß die Pécletschen Versuchskörper in einem relativ kleinen Hohlraum hingen, während im Freien oder in größeren Räumen auch bei scheinbar ganz ruhiger Luft doch fremde Luftströmungen vorhanden sind, welche die Wärmeabgabe begünstigen. Man hat derartige Einflüsse auch an im Freien gespannten Drähten beobachtet und gefunden, daß der Einfluß mit der Drahtdicke wächst. Die fremden Luftströmungen dürften auch der Grund sein, warum sich bei Versuchen über Wärmeabgabe von Körpern oft ganz bedeutende Differenzen ergeben. Die Vorgänge sind daher noch der weiteren Klärung bedürftig.

Nach den oben erwähnten Versuchen an Kapselmotoren kann für Körper von den Dimensionen 0,3 — 1 m ohne Rücksicht auf die Form näherungsweise:

$$\underline{\alpha_m = 6{,}5\ (1 + 0{,}0075\ (\tau - \tau_0))}\ \frac{\text{Watt}}{m^2\ ^0C} \quad . \quad \text{(Gl. 37a)}$$

gesetzt werden.

Also z. B. für $\tau - \tau_0 = 35^0$ C

$$\alpha_m = 6{,}5\ (1 + 0{,}0075\ (\tau - \tau_0)) = 8{,}2\ \frac{\text{Watt}}{m^2\ ^0C}.$$

Dieser Wert gilt nur für Konvektion im freien Raum. An den Teilen einer elektrischen Maschine (im Stillstand) wird die Ausbildung des aufsteigenden Luftstromes mehr oder weniger gehindert und dadurch weniger Wärme fortgeführt. Es sind daher für solche Fälle Spezialversuche nicht zu umgehen.

Addiert man Strahlung und Konvektion, so kann die gesamte Wärmeabgabe eines Körpers im freien Raum etwa gesetzt werden:

$$e + \alpha_m = 5{,}8 + 8{,}2 = 14 \ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2 \ ^0\text{C}}.$$

Wärmeübergang auf bewegte Luft.

Um einem Körper möglichst viel Wärme zu entziehen, wendet man sogenannte künstliche Kühlung an, indem man die Körperoberfläche durch einen kräftigen Luftstrom bestreichen läßt. Dadurch, daß immer wieder Frischluft mit Oberfläche in Berührung kommt, tritt eine kräftige Kühlung ein.

Wie bereits bemerkt, erfolgt der Wärmeübergang auf die unmittelbar berührenden Schichten so, wie wenn zwei feste Körper mit ebener Fläche dicht aneinander gleiten. Auch das weitere Vordringen in der Luft würde wie in einem festen Körper erfolgen, wenn die Luftteilchen nicht ihre gegenseitige Lagerung änderten, also einfach parallele Bahnen mit gleicher Geschwindigkeit beschreiben würden. Tatsächlich ist diese Bedingung nicht erfüllt. Wie man z. B. an einer aufsteigenden Rauchsäule beobachten kann, findet eine lebhafte Durcheinanderwirbelung statt (turbulente Bewegung). Dabei gelangen wärmere Teilchen zwischen kältere, so daß durch Mischung eine verhältnismäßig schnelle Wärmeausbreitung möglich ist. Dieser Einfluß der Wirbelung ist so groß, daß die von dem Luftstrom tatsächlich fortgeführte Wärmemenge ein Mehrfaches beträgt von der Wärmemenge, welche der wirbelfreien Bewegung entsprechen würde.

Bezeichnet $(\tau_m - \tau_0)$ die mittlere Temperaturzunahme der Abluft, V die pro Zeiteinheit aufgewendete Kühlluftmenge, c die spez. Wärme und s das spez. Gewicht der Luft, so ist die in der Zeiteinheit von dem Luftstrom aufgenommene Wärmemenge

$$\underline{Q = V c s \cdot (\tau_m - \tau_0)} \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(Gl. 38)}$$

Für V in cbm/sek; $s = 1{,}1$ kg/cbm; $c = 0{,}25$ Kal/kg wird

$$\underline{Q = 1{,}1 \ V (\tau_m - \tau_0)} \quad \text{Kilo-Watt.}$$

Die Abluft könnte sich günstigenfalls an allen Stellen bis zur Temperatur τ der Heizfläche erwärmen, erreicht aber in Wirklichkeit hiervon nur einen Bruchteil, so daß man

$$\underline{(\tau_m - \tau_0) = \sigma (\tau - \tau_0)} \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(Gl. 38a)}$$

setzen kann. Der Faktor σ bewegt sich dann in den Grenzen $0 - 1$ und ist ein Maß für die Ausnützung der Kühlluft. Der Faktor σ spielt eine wichtige Rolle, da er direkt der Messung zugänglich

ist. Für geometrisch einfache Anordnungen der Heizfläche und wirbelfreie Bewegung der Kühlluft kann der Faktor σ auf theoretischem Wege berechnet werden, z. B.: Zwischen zwei ebenen parallelen Heizflächen von dem Abstande $2 \times W$ und der Länge L in der Strömungsrichtung strömt Luft mit der Geschwindigkeit v. Unter der Voraussetzung, daß die Heizfläche an allen Stellen gleiche Temperatur besitzt, ist

$$\sigma = \Phi\left(\frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2}\right). \quad \text{(Gl. 39)}$$

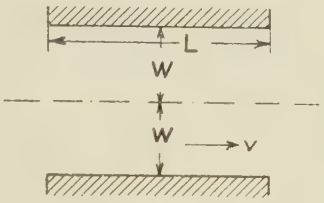


Fig. 38.

Dabei bezeichnet k das innere Wärmeleitungsvermögen, c die spez. Wärme und s das spez. Gewicht der Luft; t ist die Zeit vom Eintritt eines Luftteilchens zwischen die Heizwände bis zum Austritt aus denselben und wird passend die Berührungszeit genannt. Es ist

$$t = \frac{L}{v},$$

so daß auch $$\sigma = \Phi\left(\frac{k}{cs} \frac{L}{v\,W^2}\right).$$

Die Werte der Funktion Φ sind:

für $\frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	1,5	∞
$\Phi\left(\frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2}\right) =$	0	0,35	0,50	0,61	0,70	0,82	0,89	0,94	0,98	1

und in Fig. 13 (Seite 27) graphisch dargestellt.

Für Werte $\frac{k}{cs} \frac{t}{W^2} < 0{,}3$ entsprechend $\sigma < 0{,}61$ ist auch

$$\sigma = 1{,}12 \sqrt{\frac{k}{cs} \cdot \frac{t}{W^2}}.$$

Diese geschlossene Form ist sehr wichtig, da für die meisten praktischen Fälle $\frac{k}{cs} \frac{t}{W^2} < 0{,}3$ ist, also nach dem Wurzelausdruck gerechnet werden darf.

Näherungsweise kann Gl. 39 auch verwendet werden für den Fall, daß durch ein Rohr Kühlluft strömt. Es ist dann zu setzen

$$W = 0{,}6\, R_i,$$

wobei R_i der Radius der lichten Öffnung ist.

Nach den vorstehenden Formeln kann auch noch gerechnet werden, wenn längs des Kanals die Heizwände wechselnden Abstand haben (vgl. Fig. 39).

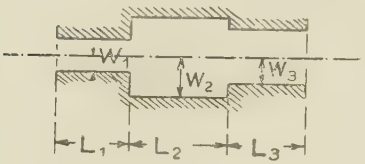


Fig. 39.

Um den bis zu einer bestimmten Stelle sich einstellenden Wert von σ zu finden, berechnet man für jede einzelne Strecke $\frac{t}{W^2}$ und bildet $\Sigma\left(\frac{t}{W^2}\right)$. Es ist dann allgemein

$$\sigma = \Phi\left(\frac{k}{cs} \cdot \Sigma\left[\frac{t}{W^2}\right]\right).$$

Man kann die zu einer bestimmten Kanalstrecke gehörige Berührungszeit in einfacher Weise auch dadurch berechnen, daß man bestimmt, wie oft das Kanalvolumen ausgefüllt werden kann. Es ist einfach

$$t = \frac{J}{V},$$

wenn J der Rauminhalt der Kanalstrecke und V die sekundlich aufgewendete Kühlluftmenge bezeichnet. Diese Art der Berechnung ist, wie sich später zeigt, für Maschinen wichtig.

Wie bereits erwähnt, ist die oben gemachte Voraussetzung der reibungs- und wirbelfreien Bewegung niemals erfüllt (s. Seite 92). Es ist daher für die praktische Verwertung dieses Rechnungsganges von großer Wichtigkeit, daß auch die turbulente Bewegung in derselben Weise berechnet werden kann. Durch Nachrechnung der Versuche von Joule, Ser und Ott hat der Verfasser gefunden, daß näherungsweise die Mischwirkung der Turbulenz dadurch zu berücksichtigen ist, daß an Stelle des wirklichen inneren Leitvermögens ein vergrößertes scheinbares Leitvermögen angenommen wird, also

$$k_i = i \cdot k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 39a)}$$

wenn k_i das vergrößerte ideelle Leitvermögen bezeichnet.

Der Vergrößerungsfaktor i hängt nach den Versuchen sowohl von der Luftgeschwindigkeit als auch von der Größe W ab; es haben sich jedoch für diese Abhängigkeit, trotz der regellos scheinenden Durcheinanderbewegung der Luftteilchen, ganz einfache Gesetze ergeben. So ist näherungsweise nach den Versuchen von

Joule: $i = 1 + 0{,}3\ Wv$

Ser: $i = 1 + 0{,}7\ Wv \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 39b)}$

oder $i = 1 + 0{,}2\ D_i v$

zu setzen innerhalb der Grenzen $W = 0 — 10$ cm. Die Kühlluft strömte bei den Versuchen von Joule zwischen zwei konzentrischen Rohren und bei den Versuchen von Ser durch ein einfaches Rohr.

Man wird daher allgemein

$$i = 1 + \omega W v$$

setzen, wobei die Konstante ω einen je nach der Ausführung der Kühlanordnung wechselnden Wert hat. Es kommt darin zum Ausdruck, mit welcher Intensität die Luft durch die Unebenheiten der Heizwand, Unregelmäßigkeiten in der Führung oder auch durch äußere Umstände bereits vor dem Eintritt in die Kühlanordnung in Wirbelung versetzt wird. Es sind daher in abweichenden Fällen besondere Versuche nicht zu umgehen.

An elektrischen Maschinen tritt wegen des plötzlichen Richtungswechsels beim Eintritt in den Rotor und beim Austritt aus demselben sowie wegen der mangelhaften Luftführung besonders starke Wirbelung auf. Es sind daher auch größere Werte der Konstanten ω zu erwarten; die für einige Fälle ermittelten Zahlenwerte sind in dem folgenden Abschnitt an den betreffenden Stellen angegeben.

Mit Einführung des scheinbaren Leitvermögens k_i bezw. des Vergrößerungsfaktors i und der für Luft gültigen Werte:

$$k = 0{,}000056 \frac{\text{gr cal.}}{\text{cm sek } {}^0\text{C}}; \quad c = 0{,}24 \frac{\text{gr cal.}}{\text{gr } {}^0\text{C}}; \quad s = 0{,}0011 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

wird schließlich

$$\sigma = \Phi\left(0{,}21 \frac{it}{W^2}\right) \text{ oder } = \Phi\left(0{,}21 \frac{iL}{W^2 v}\right). \quad \text{(Gl. 39c)}$$

und für den Bereich: $\frac{it}{W^2} = \frac{iL}{W^2 v} < 1{,}4$

$$\sigma = 0{,}52 \sqrt{\frac{it}{W^2}} \text{ oder } = 0{,}52 \sqrt{\frac{iL}{W^2 v}}. \quad \text{(39d)}$$

Dabei ist t in sek., L in m, der halbe Abstand der Heizflächen W in cm, v in m/sek. einzusetzen und i nach Gleichung 39b zu wählen. Die Werte der Funktion Φ sind Fig. 13 zu entnehmen.

Zur raschen Orientierung sind für praktisch häufig vorkommende Luftgeschwindigkeiten und Dimensionen der Heizfläche die Werte von σ in den folgenden Tabellen (Seiten 96/97) angegeben.

Aus diesen Grundsätzen für den Wärmeübergang ergeben sich für die Kühlung an elektrischen Maschinen einige wichtige Gesetze, die ohne Rücksicht auf den speziellen Aufbau der Typen allgemein Gültigkeit haben.

A. Kühlluft zwischen zwei ebenen parallelen Flächen.

Werte von σ ($i = 1 + 0{,}3\ Wv$ gesetzt).

Geschwindigkeit der Kühlluft v in m/sek.	5	10	15	20	25	30	35	40
Abstand der Heizwände	Länge der Heizwände $L = 0{,}25$ m.							
$2 \times W =$ 0,5 cm	0,54	0,43	0,39	0,37	0,35	0,34	0,33	0,33
„ 1 „	0,30	0,26	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22	0,22
„ 2 „	0,18	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
„ 4 „	0,12	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
	Länge der Heizwände $L = 0{,}50$ m.							
$2 \times W =$ 0,5 cm	0,75	0,61	0,55	0,52	0,49	0,47	0,46	0,46
„ 1 „	0,43	0,37	0,34	0,33	0,32	0,31	0,31	0,31
„ 2 „	0,26	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21	0,21	0,21
„ 4 „	0,17	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
	Länge der Heizwände $L = 1$ m.							
$2 \times W =$ 0,5 cm	0,93	0,82	0,76	0,72	0,70	0,68	0,67	0,66
„ 1 „	0,61	0,52	0,48	0,46	0,45	0,44	0,44	0,43
„ 2 „	0,37	0,33	0,31	0,31	0,30	0,30	0,30	0,30
„ 4 „	0,23	0,22	0,21	0,21	0,21	0,21	0,20	0,20
	Länge der Heizwände $L = 2$ m.							
$2 \times W =$ 0,5 cm	0,99	0,96	0,93	0,91	0,89	0,88	0,88	0,87
„ 1 „	0,82	0,72	0,68	0,65	0,64	0,63	0,62	0,61
„ 2 „	0,52	0,46	0,44	0,43	0,43	0,42	0,42	0,42
„ 4 „	0,33	0,31	0,30	0,30	0,29	0,29	0,29	0,29

B. Kühlluft im Innern von Rohren.

Werte von σ ($i = 1 + 0{,}21\ D_i v$ gesetzt).

Geschwindigkeit der Kühlluft v in m/sek.	5	10	15	20	25	30	35	40
Lichter Rohrdurchmesser:	Rohrlänge $L = 0{,}25$ m.							
$D_i =$ 0,5 cm	0,87	0,76	0,71	0,68	0,66	0,64	0,64	0,63
„ 1 „	0,56	0,48	0,46	0,44	0,43	0,42	0,41	0,41
„ 2 „	0,34	0,31	0,30	0,30	0,29	0,29	0,29	0,29
„ 4 „	0,22	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
	Rohrlänge $L = 0{,}50$ m.							
$D_i =$ 0,5 cm	0,98	0,93	0,90	0,88	0,86	0,85	0,84	0,83
„ 1 „	0,76	0,68	0,64	0,62	0,61	0,60	0,60	0,59
„ 2 „	0,48	0,44	0,42	0,42	0,42	0,41	0,41	0,41
„ 4 „	0,31	0,30	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,28

Geschwindigkeit der Kühlluft in m/sek.	5	10	15	20	25	30	35	40
				Rohrlänge $L = 1$ m.				
$D_i = 0{,}5$ cm . . .	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97
„ 1 „ . . .	0,93	0,87	0,85	0,83	0,82	0,81	0,80	0,80
„ 2 „ . . .	0,68	0,63	0,60	0,59	0,59	0,58	0,58	0,58
„ 4 „ . . .	0,44	0,42	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40
				Rohrlänge $L = 2$ m.				
$D_i = 0{,}5$ cm . . .	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
„ 1 „ . . .	0,99	0,98	0,97	0,97	0,96	0,96	0,95	0,95
„ 2 „ . . .	0,87	0,83	0,80	0,80	0,79	0,79	0,79	0,78
„ 4 „ . . .	0,62	0,59	0,58	0,58	0,57	0,57	0,57	0,57

Nach Gleichung 39c ist für den Faktor σ und dementsprechend für die Kühlwirkung bestimmend: der Berührungsweg L der Luft mit der Oberfläche, die Weite des Kanals $2 \times W$ und die Geschwindigkeit v, von denen auch der Vergrößerungsfaktor i nach Gl. 39b abhängt. Der Einfluß der einzelnen Größen soll an einem Beispiel zahlenmäßig untersucht werden und zwar für die bei Maschinen wichtige Anordnung:

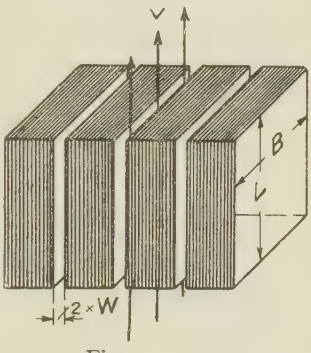


Fig. 40.

Kühlung des Eisenpaketes durch Luftschlitze.

Dabei sind die Annahmen gemacht, daß nur die Flächen innerhalb der Schlitze Wärme abgeben und daß $i = 1 + 0{,}3\ Wv$ gesetzt werden kann.

1. Einfluß der Geschwindigkeit.

In Fig. 41a sind für konstante Kanalweite $2 \times W = 1$ cm die Werte von σ für Geschwindigkeiten von 0—40 m/sek. und Paketlängen $L = 0{,}1$; 0,2; 0,4; 0,8 m dargestellt; man sieht hieraus, daß bei größeren Geschwindigkeiten σ nur sehr langsam abnimmt.

Bereits von $v =$ ca. 2 m an ist für die praktisch wichtigen Längen L der Wert $\sigma < 0{,}6$, so daß man die bequemere Näherungsform

$$\sigma = 0{,}52 \sqrt{\frac{L}{v}\left(\frac{1 + 0{,}3\ Wv}{W^2}\right)}$$

setzen kann (vgl. Seite 94/95).

Die fortgeführte Wärmemenge ist nach Gl. 38 und 38a

$$Q = 1{,}1\ V\sigma\ (\tau - \tau_0) = 0{,}011 \cdot 2 \times W \cdot Bv\sigma\ (\tau - \tau_0),$$

da $V = 0{,}01 \cdot 2\ W\ Bv$ cbm/sek.

zu setzen ist. Im vorliegenden Fall mit

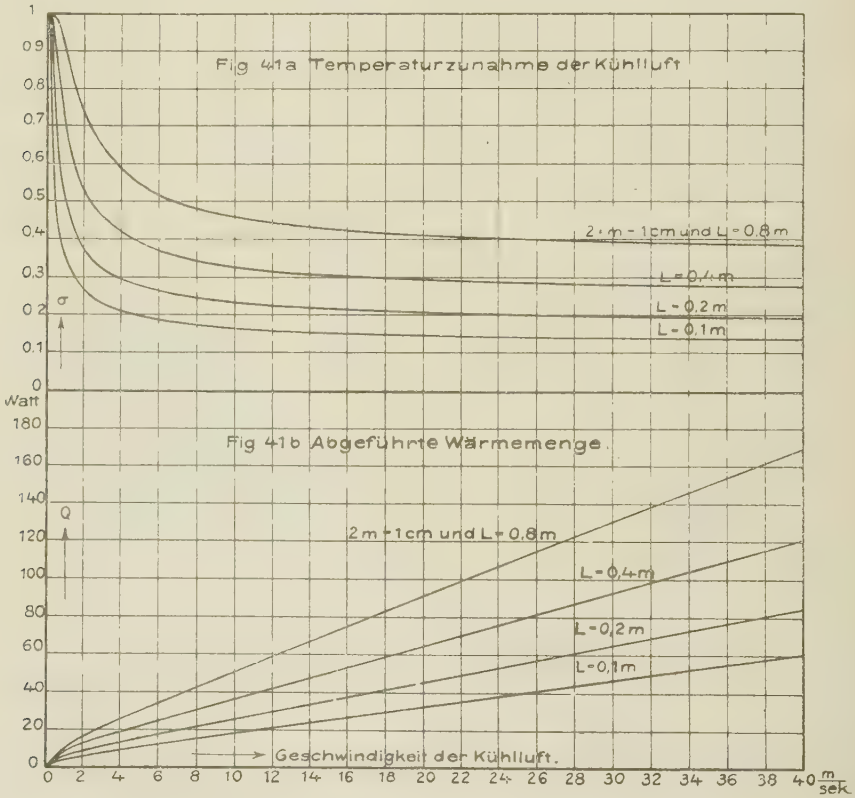
$2 \varkappa W = 1$ cm; $B = 1$ m und für $\tau - \tau_0 = 1^0$ C wird

$$Q = 0{,}011\ v\sigma \quad \text{KW/}^0\text{C}.$$

Bei Geschwindigkeiten $v > 2$ m/sek. kann für σ der weiter oben angegebene Wurzelausdruck gesetzt werden, so daß in diesem Bereich

$$\underline{Q = c_1 \sqrt{1 + c_2 v}\, v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 40a)}$$

wobei c_1 und c_2 beliebige Konstante bezeichnen.



Aus der graphischen Darstellung Fig 41b sieht man aber ohne weiteres, daß für $v > 2$ m die Kurven für Wärmemenge und Geschwindigkeit mit großer Annäherung durch Gerade ersetzt werden können. Es ergibt sich daher die noch einfachere Form.

$$\underline{Q_1 = c_1 + c_2 v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 40b)}$$

wobei c_1 und c_2 wieder beliebige Konstanten bedeuten, die aber nicht mit den oben gebrauchten identisch sind. (Dies gilt auch für die folgenden Formeln.)

In dem Abschnitt über Lüftung wurde der Satz ausgesprochen, daß die Luftgeschwindigkeit in den Kanälen und an jeder beliebigen Stelle der Maschine proportional der Ankerumfangsgeschwindigkeit, also

$$v = \text{const.}\, u$$

gesetzt werden kann. Es ist daher auch

$$Q = c_1 \sqrt{(1 + c_2 u)\, u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 40c)}$$

und

$$Q = c_1 + c_2 u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 40d)}$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur für den Bereich $v > 2$ m/sek. Bei kleineren Geschwindigkeiten beginnt auch die Konvektion sich bemerkbar zu machen, so daß für $u = 0$, also Stillstand der Maschine, doch eine kleine Geschwindigkeit v noch vorhanden ist. Die Kurven in Fig. 41b, welche für Kühlung eines geschlossenen Kanals gelten, gehen daher in Wirklichkeit nicht nach dem Nullpunkt, sondern schneiden in einer gewissen Höhe die Ordinatenachse. Die Größe dieses Stückes, welches die reine Konvektion darstellt, hängt vom Aufbau der Maschine und zahlreichen anderen Umständen ab und kann daher nur experimentell bestimmt werden. In den meisten Fällen ist aber die durch Konvektion abgegebene Wärmemenge klein gegenüber den Werten bei laufender Maschine, so daß man ohne großen Fehler einfach die Geraden in Fig. 41b bis zur Ordinatenachse verlängern kann.

Hierzu kommt noch ein ebenfalls kleiner Betrag für Strahlung, der als unabhängig von u zu betrachten ist und daher nur die Abszissenachse um ein gewisses Stück verschiebt (s. Fig. 42).

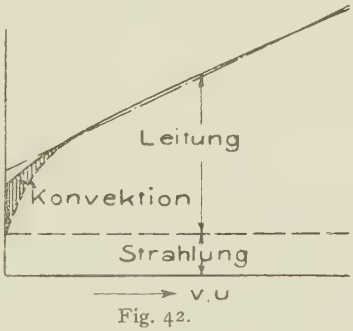


Fig. 42.

Es kann daher mit praktisch vollkommen genügender Genauigkeit bereits von $u = 0$ ab die von einem beliebigen Teil der Maschine insgesamt abgegebene Wärmemenge dargestellt werden in der Form:

$$Q = c_1 + c_2 u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gl. 40d)}$$

Diese einfache Beziehung ist von großer praktischer Wichtigkeit, da damit die für verschiedene Tourenzahlen zulässigen Wärmemengen und dementsprechend Verluste umgerechnet werden können.

Die Frage über Wärmemenge und Luft- bezw. Ankerumfangsgeschwindigkeit ist bereits Gegenstand zahlreicher Unter-

suchungen gewesen, ohne daß man zu einer endgültigen Lösung gelangt wäre.

So geben Kapp[31], Arnold[32], Ott[18] und andere die richtige Form an:

$$c_1 + c_2 v,$$

Pichelmayer[33] findet die Kanalkühlung ohne Konvektion und Strahlung die Beziehung:

$$c_1 \sqrt{v} + c_2 v,$$

die sich ziemlich gut mit Gl. 40a deckt. Dagegen sollte nach Schüppel[19], Goldschmidt[34] und Hinlein[35] die Zunahme langsamer, etwa mit $c_1 \sqrt{v}$ oder einer ähnlichen Form erfolgen. Hierzu ist aber zu bemerken, daß bei den Versuchen von Schüppel die Verlustmessung bezw. Trennung der Verluste nicht einwandfrei ist, während die Rechnungen von Goldschmidt wegen Nichberücksichtigung der Wirbelung nicht der Wirklichkeit entsprechen.

Zum Beweis der letzteren Form hat man auch die Versuche von Joule[16] und Ser[17] herangezogen, da nach diesen die Wärmeübergangszahl α (s. Seite 10) proportional $\sqrt{v}$ sich ergibt. Hierzu ist zu bemerken, daß α und Q nicht einander proportional sind und nach verschiedenen Gesetzen von v abhängen. Es muß daher ausdrücklich festgestellt werden, daß bei den Versuchen von Joule und Ser die Wärmemenge Q in der Form $Q = c_1 + c_2 v$ (näherungsweise) von der Geschwindigkeit abhängt.

Es ist noch zu bemerken, daß die Form $Q = c_1 + c_2 v$ nur für genügend große Körper gilt. Bei dünnen Drähten ist vermutlich $Q = c_1 + c_2 \sqrt{v}$ zu setzen (vgl. Teil I, Seite 39).

2. Einfluß der Kanallänge.

Für $v =$ konst. und $W =$ konst. wird nach Gl. 39c

$$\sigma = \Phi \,(\text{const.}\, L)$$

d. h. die Werte σ abhängig von L verlaufen wie die Funktion Φ nach Fig. 13.

In Fig. 43 ist diese Abhängigkeit für konstante Kanalweite $2 \times W = 1$ cm und für $v = 2{,}5,\ 5,\ 10,\ 20 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$ dargestellt. Man sieht hieraus, daß in dem praktisch meist in Frage kommenden Bereich $\sigma < 0{,}60$ bleibt und daher nach Gleichung 39 in der Form

$$\underline{\sigma = \sqrt{\text{const.}\, L}}$$

berechnet werden kann. Die Kurven sind also bis $\sigma = 0{,}60$ Parabeln. Erst bei sehr großen Längen der Heizwand oder sehr kleinen Geschwindigkeiten ist Berechnung nach Gl. 39c erforderlich. Der

Wert σ steigt dann noch langsamer als $\sqrt{L}$ und nähert sich schließlich bei allen Kurven assymptotisch dem Wert 1. Die ab-

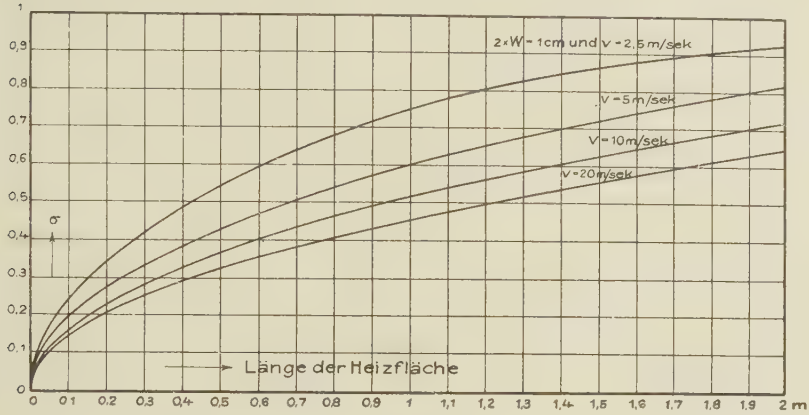


Fig. 43. Temperaturzunahme der Kühlluft, abhängig von der Länge der Heizfläche.

geführte Wärmemenge ist für $v = \text{const.}$ einfach proportional σ, d. h. die Kurven Fig. 43 stellen (ohne Rücksicht auf den Maßstab) auch die von den Kanalwänden abgegebene Wärme dar. Es ergibt sich also das praktisch wichtige Resultat, daß die abgegebene Wärme nicht proportional der Länge der Heizfläche, sondern günstigenfalls mit der Quadratwurzel aus der Länge zunimmt. In der Strömungsrichtung lange Flächen kühlen daher schlechter als kurze.

3. Einfluß der Kanalweite.

In Fig. 44 sind für konst. Kanallänge $L = 0{,}5$ m und für die Geschwindigkeiten $v = 2{,}5$; 5; 10; 20 m/sek. die nach Gl. 39c berechneten Werte σ abhängig von der Kanalweite $2 \times W$ dargestellt.

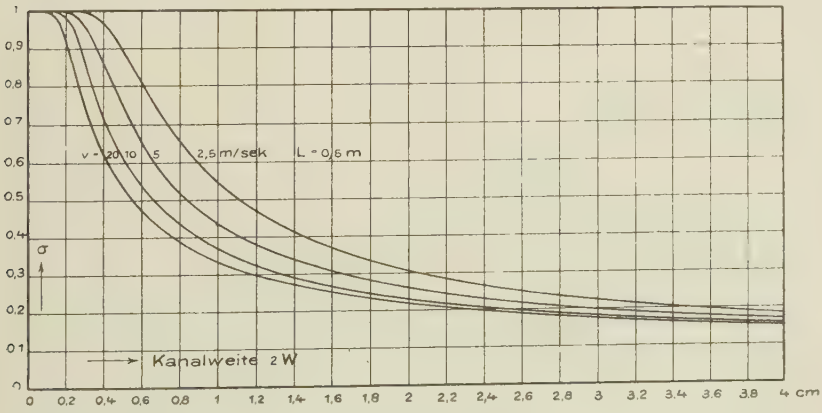


Fig. 44. Temperaturzunahme der Kühlluft, abhängig von der Kanalweite.

Die Kurven gehen in der Höhe $\sigma = 1$ von der Ordinatenachse aus, d. h. bei sehr nahestehenden Heizflächen wird die Luft fast bis zur Temperatur der Heizfläche erwärmt. Mit zunehmendem Abstand sinkt σ erst rasch und dann nach Art seiner Hyperbel ganz allmählich.

Die Ausnützung der Kühlluft wird also mit zunehmender Kanalweite geringer; es empfiehlt sich daher, wenn eine bestimmte Luftmenge zur Verfügung steht, enge und dafür mehr Kanäle anzuwenden.

Trotz der Abnahme von σ ist natürlich bei konst. Luftgeschwindigkeit die durch einen weiten Kanal abgeführte Wärmemenge größer, da die Luftmenge proportional der Kanalweite steigt, also schneller wächst, als der Wert σ abnimmt. Nur muß für die verstärkte Kühlung eine relativ große Luftmenge aufgewendet werden.

3. Berechnung der Temperaturzunahmen.

Wie bereits erwähnt, hat man zwischen dem inneren Temperaturabfall vom Innern des aktiven Materials bis zur Oberfläche und dem äußeren Temperaturabfall von der Oberfläche bis zur Umgebungsluft zu unterscheiden; im folgenden soll ausschließlich der äußere Temperaturabfall berechnet werden.

Dabei ist zu bemerken, daß eigentlich die Temperatur an jeder Stelle der Oberfläche verschieden ist. Die auftretenden Differenzen können bei langen Maschinen ziemlich beträchtlich werden; vgl. z. B. Arnold[35], Die Erwärmung der Wicklung bei Dynamomaschinen von großer Eisenlänge, E. T. Z. 1909, Heft 8. Im allgemeinen kann aber ohne großen Fehler eine mittlere Oberflächentemperatur angenommen werden, denn man spricht in der Praxis oft kurzweg von der mit Thermometer gemessenen Übertemperatur eines Teils, z. B. des Ankers, der Magnetwicklung, ohne die Meßstelle näher zu bezeichnen.

Wenn die Wicklung in Nuten des aktiven Eisens eingebettet ist und dann geringe Tiefe quer zu den Drähten hat, ist der innere Temperaturabfall relativ klein. Es kann daher ohne großen Fehler die im Folgenden berechnete mittlere Oberflächentemperatur als Temperatur der Wicklung angesehen werden. Bei Magnetwicklungen auf ausgeprägten Polen muß das innere Gefälle noch besonders berechnet werden.

Der bequemeren Darstellung wegen soll die Frage nicht so gestellt werden, welche Übertemperatur tritt an einem Teil bei

bestimmter Wärmeproduktion auf, sondern, welche Wärmemenge kann bei 1 ° C Übertemperatur abgegeben werden.

Die Wärmeabfuhr aus der Maschine erfolgt auf zwei Arten:

1. durch Strahlung an die Körper der Umgebung;
2. durch Überleitung an die berührende Luft; der Betrag durch Ableitung ins Fundament ist meistens verschwindend klein.

Für Strahlung von nicht polierten Flächen kann gerechnet werden:

$$e = 5{,}4 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\,^0\text{C}}$$

unter der Voraussetzung, daß nach allen Richtungen freie Strahlung möglich ist. In anderen Fällen muß die Konstante e entsprechend der Abdeckung reduziert werden. Bei den an Maschinen auftretenden komplizierten Formen ist diese Reduktion schwer auszuführen, so daß der genaue Betrag an Strahlung wohl nur experimentell ermittelt werden kann.

Die Strahlung spielt nur bei Transformatoren oder stillstehenden Maschinen eine Rolle. An der laufenden Maschine ist der darauf entfallende Betrag meistens sehr gering, so daß hauptsächlich Wärmeübergang an die Luft in Frage kommt.

Wie nun auch der Aufbau der Maschine beschaffen sein mag, so ist doch der Vorgang allgemein der, daß aus der Umgebung eine gewisse Menge Frischluft entnommen wird, durch Berührung mit den warmen Flächen der Maschine Wärme aufnimmt und dann wieder in die Umgebung zurückgeht. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Luftbewegung durch die Maschine selbst hervorgerufen wird (natürliche Kühlung) oder durch einen Ventilator erzeugt wird (künstliche Kühlung).

Es kann allgemein nach Gl. 38a die abgeführte Wärmemenge

$$Q = 1{,}1\ V\sigma \quad \text{Kilo-Watt}/^0\text{C}$$

gesetzt werden, wenn V die Luftmenge in cbm/sek., σ der Grad der Erwärmung und die Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche und Frischluft = 1 ° C ist.

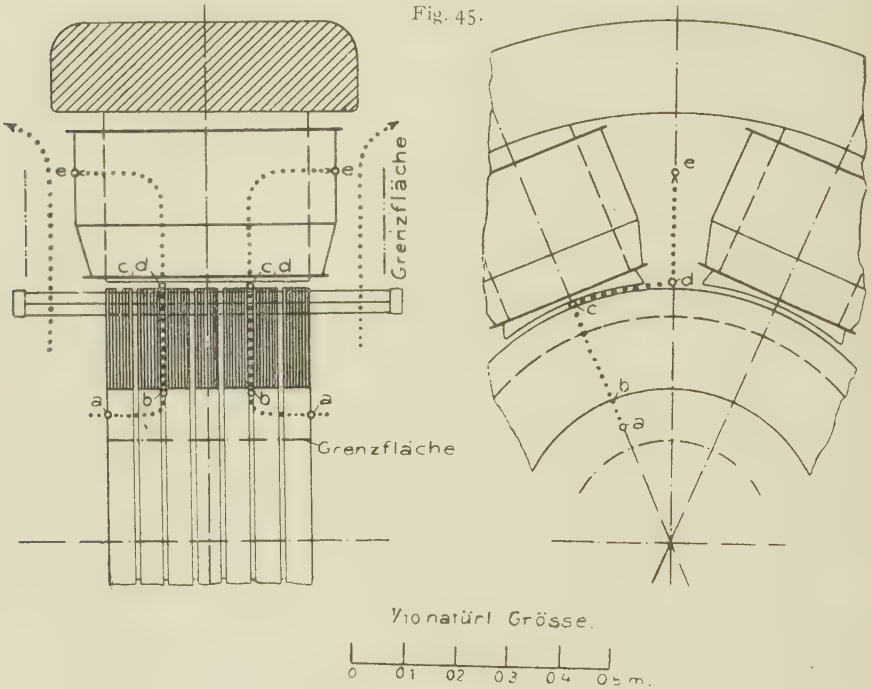
Die Größen V und σ hängen vom Aufbau der Maschine ab und sind, wie in den Abschnitten über „Lüftung“ und „Wärmeübergang auf Luft“ näher ausgeführt ist, in jedem Einzelfall zu berechnen. Als Beispiel soll im folgenden die

Berechnung für eine Außenpoltype

durchgeführt werden.

Aufbau der Type: Normale Gleichstrommaschine; Rotor zylindrisch aus Blechpaketen mit Schlitzen; Wicklung in Nuten eingebettet, Wicklungsköpfe auf einem Zylindermantel. Stator mit ausgeprägten Polen event. auch Wendepolen (s. die maßstabliche Skizze Fig. 45).

Fig. 45.



Für die Zahlenrechnung seien folgende Dimensionen zugrunde gelegt:

Äußerer Ankerdurchmesser	100	cm
Innerer „	60	„
Eisenlänge mit Luftschlitzen	40	„
6 Luftschlitze à 10 mm		
8 Pole, Höhe der Schenkel	30	„
Mittlerer Abstand zwischen 2 Polen .	10	„
Luftspalt zwischen Anker und Polen .	0,8	„
Umdrehungen/Min.	$n = 380$	
Ankerumfangsgeschwindigkeit .	$u_2 = 20$	m/sek.

Rotor.

Kühlung des Eisenkörpers (vgl. Fig. 32 Seite 60):

Bei den freien Querschnitten $F_2 = 1130$ cm² (Luftschlitze an der Ankeroberfläche) und $F_3 = 3200$ cm² (zwischen den Polen) und

mit den Widerstandskoeffizienten $\zeta_3 = 3$; $\zeta_4 = \infty$; $\zeta_5 = 16$ wird nach Gl. 27a $\zeta_\alpha = 2$ und nach Gl. 28a

$$v_2 = \sqrt{\frac{20^2 - 12^2}{3+2}} = 7{,}2 \text{ m/sek.} = 0{,}36\, u_2.$$

Es ist demnach die vom Kern geförderte Luftmenge

$$v_2 = F_2 \cdot v_2 = 0{,}81 \text{ m}^3\text{/sek.}$$

Zur Berechnung von σ ist für jeden Teil des Luftweges der Ausdruck: $\frac{it}{W^2}$ (t = Berührungszeit, W = halber Abstand der Heizflächen) zu bilden. Auf Grund der an einigen Maschinen direkt gemessenen Werte von σ berechnet sich rückwärts der Wert des Vergrößerungsfaktors

$$i = 1 + 0{,}5\, W u_2.$$

In dieser Formel ist nicht die Luftgeschwindigkeit in den Kanälen, sondern die Ankerumfangsgeschwindigkeit u_2 eingeführt, weil die Wirbelung in erster Linie hiervon abhängt.

Zuflußraum (Luftweg $a-b$): Erfolgt, wie bei kleinen Maschinen, der Zufluß durch axiale Löcher im Ankereisen, so kann $W = 0{,}3$ vom Durchmesser dieser Löcher gesetzt werden. Bei größeren Maschinen mit freiem Eisenpaket ist W gleich dem Abstand zwischen der inneren Zylinderfläche und der Nabe; sobald jedoch dieses Maß 10 cm überschreitet, kann man in diesem Abstand eine ideelle Grenzfläche annehmen, da die darüber hinausliegende Luftmasse doch nur geringe Beteiligung hat.

Mit $W = 10$ cm wird $i = 101$ und nach den Bemerkungen auf Seite 94 die mittlere Berührungszeit = Volumen des Zuflußraumes: Durchströmende Luftmenge also $t = 0{,}063 : 0{,}81 = 0{,}078$ sek., so daß schließlich

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}08.$$

Luftschlitze (Luftweg $b-c$): Der Berührungsweg L ist gleich 0,2 m, wenn man der Einfachheit wegen die Zähne dazu rechnet. Die mittlere Geschwindigkeit der Luft zwischen den Schlitzen berechnet sich aus der geförderten Luftmenge $V_2 = 0{,}81$ m³/sek. und dem mittleren Strömungsquerschnitt $F_s = 1500$ cm² zu 5,4 m/sek. Damit wird $t = L : v = 0{,}037$ sek. und für $W = 0{,}5$ cm, dementsprechend $i = 6$

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}90.$$

Luftspalt zwischen Anker und Polschuhen (Luftweg $c-d$): Die mittlere Berührungszeit ist ebenso zu berechnen wie

beim Zuflußraum nach der Gleichung $t = J : V_2 = 0{,}012$ Sek.; mit $W = 0{,}8$ cm und $i = 9$ wird

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}17.$$

Für den gesamten für die Ankerkühlung in Betracht kommenden Weg ist also

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}08 + 0{,}90 + 0{,}17 = 1{,}15,$$

wovon der Hauptanteil auf die Luftschlitze entfällt; damit wird

$$\sigma = 0{,}51 \sqrt{\left(\frac{it}{W^2}\right)} = 0{,}56$$

und die vom Eisenkörper abgeführte Wärmemenge

$$Q = 1{,}1\, v_2 \sigma - 0{,}50 \text{ KW/}^0\text{C}.$$

Kühlung der Wicklungsköpfe.

Wenn die Stäbe oder Schablonen reichlich Abstand voneinander haben, so kann der freie Querschnitt des dadurch entstehenden Gitters gleich etwa 10 % des Zylindermantels gesetzt werden. Im vorliegenden Fall bei einer Wicklungsausladung von je 0,18 m ergibt dies $F_2 = 0{,}1 \times 11400 = 1140$ cm². Setzt man: $\zeta_i = 2$; $\zeta_a = 0$; $u_2 = 20$ m/sek; $u_1 = 0{,}8, u_2 = 16$ m/sek., so wird nach Gl. 28a

$$v_2 = \sqrt{\frac{400 - 256}{2}} = 8{,}5 \text{ m/sek.} = 0{,}42\, u_2$$

und

$$V_2 = F_2 v_2 = 0{,}97 \text{ m}^3\text{/sek.}$$

für beide Ankerseiten.

Als Berührungsweg ist hauptsächlich die radiale Tiefe der Wicklung zu rechnen, also für eine Nutentiefe von 50 mm etwa $L = 0{,}05$ m; damit wird $t = L : v = 0{,}006$ sek. Entsprechend einem mittleren Abstand der Stäbe von 0,4 cm kann $W = 0{,}2$ cm gesetzt werden. Damit ergibt sich $i = 1 + 0{,}5\, W u_2 = 3$ und wird

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}45$$

und

$$\sigma = 0{,}52 \sqrt{\frac{it}{W^2}} = 0{,}35.$$

Die abgeführte Wärmemenge ist demnach

$$Q = 1{,}1\, V_2 \sigma = 0{,}37 \text{ KW/}^0\text{C}.$$

Vergleicht man Maschinen von gleicher Ausführung und gleichen Dimensionen, aber verschiedener Ankereisenlänge, so ergibt sich nach der vorgehenden Berechnungsmethode, daß die

geförderte Luftmenge proportional der Schlitzzahl und dementsprechend der Eisenlänge steigt, und der Wert σ konstant ist. Es muß daher auch die abgeführte Wärmemenge proportional der Eisenlänge steigen, d. h. die Kernkühlung wird beim langen Anker nicht schlechter. In Wirklichkeit trifft dies nicht ganz zu, da wegen verschiedener Umstände, die in obiger Rechnung nicht berücksichtigt sind, die Luftmenge nicht ganz proportional der Ankerlänge steigt.

Die geförderte Luftmenge und dementsprechend die abgeführte Wärmemenge geht mit der Zahl der Luftschlitze und der freien Querschnitte an den Wicklungsköpfen zurück, so daß sich schließlich für den Anker mit vollständig geschlossener Oberfläche gar keine Wärmeabfuhr ergeben würde. In Wirklichkeit treten aber dann die auf Seite 55 geschilderten Luftströmungen auf und bewirken eine verhältnismäßig gute Oberflächenkühlung. Die Berechnung dieser Vorgänge kann im Prinzip in derselben Weise erfolgen wie für Kanalkühlung, stößt jedoch in der Ausführung auf einige Schwierigkeiten. Bei der gedrängten Bauart moderner Maschinen ist Oberflächenkühlung in den seltensten Fällen ausreichend und daher Ausführung mit Luftschlitzen erforderlich.

Stator.

Bei der Berechnung der Statorkühlung ist vor allem zu bemerken, daß Anwärmung durch den Rotor stattfindet; es geschieht dies in geringem Maße durch Strahlung, hauptsächlich aber dadurch, daß die Ankerluft in bereits erwärmtem Zustand die Statorfläche bestreicht. Man kann daher mit ziemlicher Annäherung annehmen, daß die Magnetwicklung bereits im stromlosen Zustand die Temperatur der abströmenden Ankerluft erreicht. Es wurde für vorliegenden Fall bereits berechnet: $\sigma = 0{,}56$ für den Kern und $\sigma = 0{,}35$ für die Wicklungsköpfe, so daß im Mittel $\sigma = 0{,}40$ gesetzt werden kann. Beträgt die Ankererwärmung 50^0 C, so ist die Temperatur der Abluft ca. $0{,}4 \cdot 50 + = 20^0$ C über Frischlufttemperatur. Erfahrungsgemäß ist die Oberflächentemperatur der Magnetwicklung ca. 0,7 der inneren aus Widerstandszunahme bestimmten Temperatur, so daß sich für mittlere Verhältnisse folgende Temperaturstufen ergeben:

Innere Temperatur der Magnetwicklung .	50^0 C	über Umgebung,
Oberflächentemperatur der Magnetwicklung	35^0 C	„ „
Ablufttemperatur	20^0 C	
Differenz	15^0 C.	

Die Oberfläche der Magnetwicklung hat also das relativ kleine Temperaturgefälle von etwa 15° C gegenüber der Kühlluft des Ankers.

Kühlung der Innenflächen.

Da bei Außenpoltypen axial keine Luft strömt, ist die zwischen den Polen durchgehende Luftmenge gleich der vom Kern geförderten, also

$$V_5 = V_2 = 0{,}81 \text{ m}^3/\text{sek. bei } u_2 = 20 \text{ m/sek.}$$

Bei dem mittleren Abstand der Polflächen $2 \times W = 10$ cm und dementsprechend $F_5 = 3200$ cm² ist die mittlere Geschwindigkeit $v_5 = V_5 : F_5 = 2{,}6$ m/sek. Der Berührungsweg L kann gleich 0,3 m gesetzt werden, so daß $t = L : v = 0{,}12$ sek.

Für i gilt annähernd die Formel $i = 1 + 0{,}2\, W u_2$, so daß

$$\frac{it}{W^2} = \frac{21 \cdot 0{,}12}{25} = 0{,}1$$

und

$$\sigma = 0{,}52 \sqrt{\frac{it}{W^2}} = 0{,}16$$

wird. Es ist demnach die von den Innenflächen abgeführte Wärme

$$Q = 1{,}1 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}16 = 0{,}14 \quad \text{KW/°C}$$

bezogen auf die tatsächliche Temperaturdifferenz (15° C) zwischen Oberfläche und Ankerluft.

Kühlung der Stirnflächen.

Die Stirnflächen werden durch die von den Wicklungsköpfen geschleuderte Luft bestrichen. Es ist daher annähernd für beide Stirnseiten

$$V = 0{,}96 \text{ m}^3/\text{sek. bei } u_2 = 20 \text{ m/sek.}$$

Für W ist je nach der Wicklungsausladung ein ideeller Grenzwert zu setzen. Nimmt man $W = 10$ cm, so wird die mittlere Geschwindigkeit in radialer Richtung $v = 1{,}5$ m/sek. und für den Berührungsweg $L = 0{,}3$ m die Berührungszeit $t = L : v = 0{,}2$ Sek.

Mit $i = 1 + 0{,}2\, W u_2$ ergibt sich

$$\frac{it}{W^2} = 0{,}082,$$

somit

$$\sigma = 0{,}52 \sqrt{\frac{it}{W^2}} = 0{,}15$$

und

$$Q = 0{,}16 \quad \text{KW/°C.}$$

Die durch Strahlung abgegebene Wärmemenge kann bei den Innenflächen wegen deren gegenseitiger Bestrahlung wohl vernachlässigt werden. Für die Stirnflächen dagegen ist ziemlich freie Abstrahlung möglich, so daß der volle Betrag von etwa 5,4 Watt/m² gerechnet werden kann. Dabei ist die Differenz zwischen Oberflächen- und Umgebungstemperatur, für vorliegenden Fall also etwa 35° C als wirksames Gefälle zu setzen.

Durch den Einbau von Wendepolen wird die Luftförderung des Ankerkerns stark beeinträchtigt und bei kleinem Abstand zwischen Magnet- und Wendepolwicklung fast ganz unterdrückt. Für mittlere Verhältnisse geht der freie Querschnitt F_5 auf etwa $^1/_4$ desjenigen der wendepollosen Maschine zurück. Eine Berechnung in der vorgehenden Weise ergibt, daß damit die Luftförderung nur etwa 45 % und die vom Kern abgeführte Wärmemenge nur etwa 60 % noch beträgt. Die Erwärmung des Ankers steigt allerdings nicht in gleichem Maße, da ja die Kühlung der Wicklungsköpfe nicht beeinträchtigt wird.

Die Verengung der Querschnitte ist auch auf die Magnetwicklung von Einfluß, da erstens die Ankerablufttemperatur und dementsprechend die Anwärmung eine höhere wird und zweitens die Kühlung der Innenflächen wegen der verminderten Luftmenge schlechter wird. Dazu kommt noch die Anwärmung durch die Wendepole wegen der darin entwickelten Wärme.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, den Wärmeübergang von einem Körper auf ruhige oder bewegte Luft zu berechnen, indem die Ausbreitung der Wärme in der Luft selbst mittels der Differentialgleichung der Wärmeleitung studiert wird. Dabei ergibt sich das praktisch wichtige Resultat, daß nach allen bisherigen Versuchen (ausgenommen für Drähte) die abgeführte Wärmemenge einheitlich in der Form $Q = C_1 \sqrt{L \cdot (1 + C_2 v)}\, v$ (L = Länge der Heizfläche in der Strömungsrichtung, v = Luftgeschwindigkeit, C_1 und C_2 Konstanten) oder für nicht zu kleine Geschwindigkeiten in der Form $Q = C_1 + C_2 v$ dargestellt werden kann. Bei der natürlichen Konvektion steigt übereinstimmend nach Rechnung und Versuch die abgegebene Wärmemenge mit der 1,25-Potenz der Temperaturdifferenz, während die Abhängigkeit von den Dimensionen nicht ganz eindeutig festzustellen war.

Es wird sodann die Lüftung von elektrischen Maschinen beschrieben und berechnet mit Berücksichtigung der Lüftungsarbeit und Eigenerwärmung der Luft. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips und der bereits im ersten Teil entwickelten Grundsätze über den Wärmeübergang auf Luft ergibt sich schließlich die Lösung der eigentlichen Aufgabe, die Erwärmung der elektrischen Maschinen zu berechnen. Das entwickelte Rechnungsverfahren wird an einem Beispiel erläutert.

Literaturverzeichnis.

1. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906, A. Barth, Seite 7.
2. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen 1882.
3. Leslie, Experimental Inquiry into the Nature and Propagation of Heat, London 1804.
4. Dulong und Petit, Annales de Chimie et de Physique, Bd. 7, Paris 1817.
5. Stefan, Berichte der Wiener Akademie, Bd. LXXIX (2), 1879.
6. Boltzmann, Wied. Ann. 22, 1884.
7. Lummer und Pringsheim, Wied. Ann. 63, 1897.
8. Lummer und Kurlbaum, Der elektrisch geglühte absolut schwarze Körper und seine Temperaturmessung. Verh. Phys. Ges. Berlin, Bd. 17, 1898.
9. Leslie, wie 3.
10. Melloni, Poggend. Ann., Bd. XXXV.
11. Péclet, Traité de la chaleur consideré dans ses applications, III. Edition, Bd. 1, 1860, deutsch bearbeitet von Dr. Carl Hartmann, Leipzig 1860. Wolfgang Gerhard.
12. O. Lummer: Über die Strahlung des absolut schwarzen Körpers und seine Verwirklichung, Naturw. Rundschau 1895, Bd. 11, Seite 65—68, 82—83, 93—95.
13. Kurlbaum, Wied. Ann. 65, Seite 759, 1898.
14. Fourier, Théorie de la chaleur, Deutsche Ausgabe von Weinstein Seite 334.
15. Mollier, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1897.
16. Joule, Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1861), Vol. 151 — Part. I, Seite 158.
On the Surfacecondensation of Steam.
17. Ser, Physique industrielle, Paris 1888, Bd. I, Seite 147/159.
18. Ott, Untersuchungen zur Frage der Erwärmung elektrischer Maschinen, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 35/36, Berlin 1906.
19. Schüppel, Über den Einfluß der Beschaffenheit der Oberfläche von elektrischen Maschinen und der Tourenzahl auf die Erwärmung. Dissertation, Hannover 1902.
20. Osborne Reynolds Philosophical Transactions London 1883 und
Philosophical Transactions London 1895, auch
Sommerfeld, Die wissenschaftlichen Ergebnisse und Ziele der modernen technischen Mechanik, Physikalische Zeitschrift 1902/3, 4. Jahrgang, Seite 779.

21. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes; Mém. div. sav. 23 Paris 1877; abgekürzt als: Théorie de l'écoulement tourbillonant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande séction, Paris 1897.
22. Oberbeck, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 13 (1879), Seite 271.
23. Lorenz, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 13 (1881), Seite 582.
24. Teichmüller, Die Erwärmung der elektrischen Leitungen, Stuttgart, Verlag von Enke, 1905, ferner
Teichmüller und Humann, Belastung von Leitungen für Hausinstallationen, ETZ 1907, Seite 475.
25. H. Ebeling, Über den Temperaturverlauf von wechselstromdurchflossenen Drähten, Annalen der Physik 1908, Seite 391.
26. W. Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. Z. d. V. d. I. 1909, Heft 43/44, Seite 1750.
27. Dalby, Engineering, London 1909, Vol. LXXXVIII, Heft Nr. 2286, Heat Transmission; auch
The Engineer, Vol. CVIII, Heft 2808/10, Seite 432.
(Nr. 26 und 27 nach Abschluß der Arbeit erschienen.)
28. Rietschel, Leitfaden zum Berechnen und Entwerfen von Lüftungs- und Heizungsanlagen, Berlin, Springer, 1894.
29. v. Jhering, Die Gebläse, Berlin, Springer, 1903.
30. Finsterwalder, Aerodynamik, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, IV, 17.
31. Kapp, Dynamomaschinen für Gleich- und Wechselstrom, Berlin, Springer, 1904.
32. Arnold, Die synchronen Wechselstrommaschinen, Berlin, Springer, 1904.
Die Gleichstrommaschine, Berlin, Springer, 1906.
33. Pichelmayer, Dynamobau, Leipzig 1908, S. Hirzel.
34. Goldschmidt, Die Grundgesetze der Erwärmung elektrischer Maschinen, E. T. Z. 1908.
35. Arnold, Die Erwärmung der Wicklung bei Dynamomaschinen von großer Eisenlänge, E. T. Z. 1909, Heft 8.
36. Stefan, Wiener Berichte 1872, Bd. LXV.
37. Kundt und Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLVI.
38. Hinlein, Dissertation über Wärmeabgabe rotierender Körper, München 1910.

Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. d. Saale.